

Remarque :

La partie II du Problème 3 sera à rendre avec le DM 2 pour le 10 octobre

Problème 1

1. Viscosité d'un fluide

Pour définir physiquement la viscosité d'un fluide, on peut par exemple affirmer qu'elle est responsable de la force de frottement qu'exerce le fluide sur un solide qui se déplace par rapport à lui. On imagine par exemple l'expérience suivante dans laquelle un fluide au repos est inséré entre deux plaques planes parallèles de grande surface S , l'une immobile, l'autre en translation de vitesse V parallèle à la première.

À cause de sa viscosité, le fluide est immobile près de la plaque fixe et progressivement entraîné vers la plaque mobile ; il faut constamment tirer celle-ci avec une force F pour maintenir sa vitesse et résister à la force de freinage due à la viscosité.

On peut donc écrire une loi expérimentale pour définir la viscosité η du fluide, suivant laquelle F est proportionnelle à η , V et S . La distance E entre les plaques doit jouer un rôle inverse car la déformation du fluide s'accroît quand E diminue.

Pour un fluide *newtonien*, on observe la loi expérimentale $F \propto \frac{SV}{E}$ où le signe \propto désigne la proportionnalité. On en déduit la définition expérimentale de la viscosité pour les fluides newtoniens :

$$\frac{F}{S} = \eta \frac{V}{E}$$

- Écrire l'équation aux dimensions donnant la dimension MLTI de la viscosité η .
- En déduire l'unité de viscosité en fonction des unités S.I. fondamentales. Chercher son nom.

2. Coefficient de perte de charge linéaire

Pour obtenir la loi de *similitude* qui régit la perte de pression que subit un fluide visqueux dans une canalisation cylindrique rugueuse, il est important de savoir de quels *groupements adimensionnels* Π_i ce phénomène dépend pour que cette loi soit générale et identique pour tout fluide et toute canalisation.

Les variables physiques dont dépend le phénomène physique sont au nombre de 7 :

- la masse volumique du fluide ρ ;
- la perte de pression motrice ΔP_g où $P_g = P + \rho g z$ avec P pression du fluide, g accélération de la pesanteur, z altitude ;
- la longueur L et le diamètre D de la conduite ;
- la rugosité intérieure ε de la conduite (hauteur moyenne des aspérités) ;
- la vitesse moyenne V du fluide dans une section droite de la canalisation.

La relation cherchée est de la forme ;

$$(\Delta P_g)^a L^b D^c V^d \eta^e \rho^f \varepsilon^g = 1 \quad (1)$$

où a, b, c, d, e, f et g sont des exposants entiers ou fractionnaires à déterminer.

- Exprimer chacune des 7 variables en unités MLTI.
- En déduire trois équations liant a, b, c, d, e, f et g . On peut donc exprimer trois des exposants en fonction des quatre autres. Exprimer c, d et f en fonction de a, b, e et g .
- Montrer qu'on peut écrire l'équation (1) en fonction des quatre groupements adimensionnels suivants :

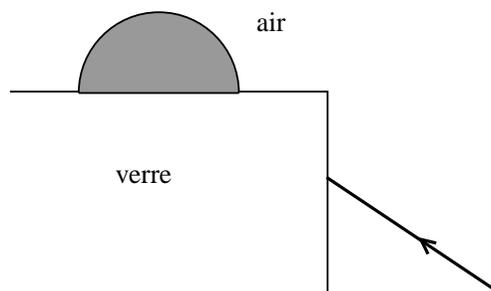
$$\Pi_1 = \frac{\Delta P_g}{\rho V^2}; \quad \Pi_2 = \frac{L}{D}; \quad \Pi_3 = \frac{\rho V D}{\eta}; \quad \Pi_4 = \frac{\varepsilon}{D}$$

- L'expérience montre que ΔP_g et L sont proportionnels. Que peut-on en déduire pour l'expression de ΔP_g ?

Problème 2

On souhaite mesurer l'indice de réfraction n d'un liquide transparent. Pour cela on dispose une goutte de ce liquide sur la face supérieure horizontale d'un parallélépipède rectangle en verre, d'indice $n_v > n$. Le dispositif est placé dans l'air, dont l'indice est pris égal à 1. On éclaire l'une des faces latérales verticales avec un faisceau lumineux et on note i l'angle d'incidence des rayons sur cette face.

1. Dessiner le trajet du rayon lumineux dans le cas où le rayon est réfracté dans le liquide.
2. on constate que la réfraction dans le liquide n'est possible que lorsque $i > i_{\text{lim}}$. Exprimer i_{lim} en fonction de n et n_v .
3. Calculer l'indice de réfraction du cyclohexane pour lequel on observe $i_{\text{lim}} = 47,81^\circ$ avec $n_v = 1,607$.



Problème 3

Les deux parties sont totalement indépendantes

I – Observation de Mars à travers une lunette

On considère une lunette astronomique formée :

- d'un objectif constitué d'une lentille mince convergente L_1 de distance focale $f'_1 = O_1F'_1 > 0$.
- d'un oculaire constitué d'une lentille mince convergente L_2 de distance focale $f'_2 = O_2F'_2 > 0$.

Ces deux lentilles ont même axe optique Δ .

On souhaite observer la planète Mars, qui est vue à l'œil nu sous un diamètre apparent α .

1. Pour voir la planète nette à travers la lunette, on forme un système afocal.

a. Que cela signifie-t-il? Que cela implique-t-il pour les positions des lentilles?

b. Faire le schéma de la lunette en prenant $f'_1 = 5f'_2$. Dessiner sur ce schéma la marche à travers la lunette d'un faisceau lumineux formé de rayons issus de l'étoile. On appellera $A'B'$, l'image intermédiaire.

c. On souhaite photographier cette planète. Où faut-il placer la pellicule?

2. On note α' , l'angle que forment les rayons émergents extrêmes en sortie de la lunette.

a. L'image est-elle droite ou renversée?

b. La lunette est caractérisée par son grossissement $G = \frac{\alpha'}{\alpha}$. Exprimer G en fonction de f'_1 et f'_2 .

c. Le principal défaut d'une lentille est appelé défaut d'aberrations chromatiques : expliquer brièvement l'origine de ce défaut et ses conséquences. Pour quelle raison un miroir n'a-t-il pas ce défaut?

3. On veut augmenter le grossissement de cette lunette et redresser l'image. Pour cela, on interpose entre L_1 et L_2 , une lentille convergente L_3 de distance focale $f'_3 = O_3F'_3 > 0$. L'oculaire L_2 est déplacé pour avoir de la planète une image nette à l'infini à travers le nouvel ensemble optique.

a. Quel couple de points doit conjuguer L_3 pour qu'il en soit ainsi?

b. On appelle γ_3 , le grandissement de la lentille L_3 . En déduire $O_3F'_1$ en fonction de f'_3 et γ_3 .

c. Faire un schéma. (On placera O_3 entre F'_1 et F_2 , et on appellera $A'B'$ la première image intermédiaire et $A''B''$, la seconde image intermédiaire).

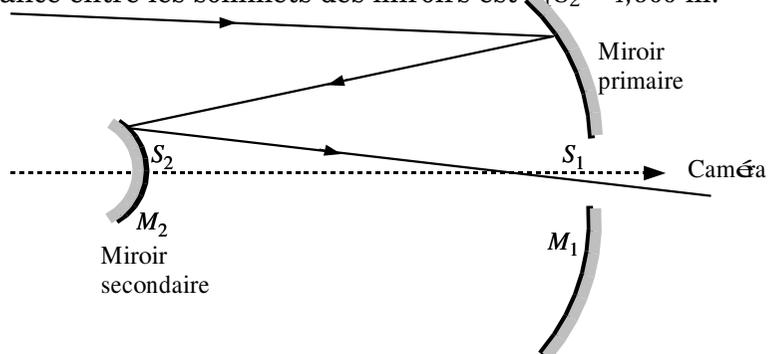
d. En déduire le nouveau grossissement G' en fonction de γ_3 et G . Comparer à G , en norme et en signe.

II – Observation de Mars à travers un télescope

Le télescope HUBBLE est un instrument optique placé en orbite à une altitude de 580 km évitant ainsi les perturbations dues à l'atmosphère terrestre. Les deux miroirs sont placés dans une configuration du type CASSEGRAIN. Dans le problème, on modélise les miroirs par des miroirs sphériques qu'on supposera utilisés dans les conditions de GAUSS. Le télescope est alors composé :

- d'un miroir sphérique concave M_1 , de sommet S_1 et de rayon $R_1 = 11,025$ m, percé d'une petite ouverture centrale derrière laquelle on place un oculaire ou une caméra ;
- d'un petit miroir sphérique convexe M_2 , de sommet S_2 et de rayon $R_2 = 1,355$

m qui envoie vers l'oculaire (ou la caméra) la lumière réfléchiée sur le miroir M_1 . La distance entre les sommets des miroirs est $S_1S_2 = 4,900$ m.



4. On considère un objet lumineux O ponctuel à l'infini sur l'axe. Déterminer, par rapport à S_1 , son image O' après réflexion des rayons lumineux sur M_1 et M_2 .

5. Soit la planète Mars considérée comme un objet étendu AB situé à l'infini et centré sur l'axe optique, de diamètre apparent α . Déterminer les caractéristiques (position et taille) de son image $A'B'$ à travers le télescope.

6. *Application numérique* $\alpha = 26,0$ seconde d'arc

Commentaires et correction

Problème 1

Pas de difficulté sur le début du problème.

La première question non complètement résolue concerne la situation où ΔP_g est proportionnel à L . Très peu d'entre vous ont trouvé la relation $b = -a$ qui en découle. Personne n'a su faire de commentaire sur la question. C'est malgré tout une question très classique que de devoir commenter un résultat. C'est là où l'on teste les esprits scientifiques. Pas de crainte, l'expérience permet de faire face à ce genre de question.

Problème 2

Cet exercice a été bien résolu. Attention certains ont une rédaction un peu longue. Ainsi, il ne faut plus expliquer mathématiquement pourquoi le rayon est plus proche de la normale du côté du milieu le plus réfringent. C'est un résultat connu de tous qu'on ne démontre plus.

Problème 3

L'étude de la lunette a été relativement bien traité à part les points suivants :

- La figure correspondant au cas avec la lentille L_3 n'a pas été toujours clairement effectuée. À retravailler si nécessaire
- on peut travailler avec des angles non-orientés, donc toujours positifs. Il faut faire alors attention avec les signes dans les relations faisant apparaître les grandeurs algébriques et les tangentes. On peut aussi, et c'était assez astucieux ici, travailler avec des angles orientés. Il faut alors bien préciser le sens positif. Les angles sont alors tous définis avec la même logique : le plus simple est de partir de l'axe et d'aller vers le rayon.
- j'ai vu plusieurs fois la question de la lentille L_3 résolue de la façon (fausse) suivante : on place L_3 de sorte que $F_3 = F'_1$ et $F'_3 = F_2$. Cela suppose implicitement que l'image de F_3 à travers L_3 est F'_3 . C'est une **grave erreur** !

Problème 1

1. Viscosité d'un fluide

- a. D'après l'équation de définition de la viscosité, on écrit l'équation aux dimension sous la forme :

$$\frac{[F]}{[S]} = [\eta] \frac{[V]}{[E]}$$

où les crochets désignent les dimensions des grandeurs physiques. On en déduit :

$$[\eta] = \frac{[F]}{[S]} \frac{[E]}{[V]} = \frac{MLT^{-2}}{L^2} \frac{L}{LT^{-1}} = ML^{-1}T^{-1}$$

- b. L'unité S. I. de la viscosité est le $kg \cdot m^{-1} \cdot s^{-1}$ appelé le Poiseuille.

2. Coefficient de perte de charge linéaire

- a. Les unités MLTI sont : $[\Delta P_g] = [F]/[S] = ML^{-1}T^{-2}$; $[V] = LT^{-1}$; $[\eta] = ML^{-1}T^{-1}$; $[\rho] = ML^{-3}$; $[\varepsilon] = L$;
- b. En reportant ces expressions dans la relation proposée, on obtient :

$$(\Delta P_g)^a L^b L^c (LT^{-1})^d (ML^{-1}T^{-1})^e (ML^{-3})^f L^g = 1$$

soit

$$L^{a+e+f} M^{-a+b+c+d-e-3f+g} T^{-2a-d-e} = 1$$

On en déduit

$$\begin{cases} a+e+f=0 \\ -a+b+c+d-e-3f+g=0 \\ 2a+d+e=0 \end{cases}$$

- c. On peut exprimer 3 des exposants en fonction des 4 autres, ainsi :

$$\begin{cases} d = -2a - e \\ f = -a - e \\ c = -e - b - g \end{cases}$$

d'où

$$(\Delta P_g)^a L^b D^{-b-e-g} V^{-2a-e} \eta^e \rho^{-a-e} \varepsilon^g = \left(\frac{\Delta P_g}{\rho V^2}\right)^a \left(\frac{L}{D}\right)^b \left(\frac{\eta}{\rho V D}\right)^e \left(\frac{\varepsilon}{D}\right)^g = 1 \quad (2)$$

On retrouve bien les quatre groupements

$$\Pi_1 = \frac{\Delta P_g}{\rho V^2}; \quad \Pi_2 = \frac{L}{D}; \quad \Pi_3 = \frac{\rho V D}{\eta}; \quad \Pi_4 = \frac{\varepsilon}{D}$$

d. La relation (2) peut se ré-écrire sous la forme :

$$\Delta P_g = L^{-\frac{b}{a}} D^{\frac{b+e+g}{a}} V^{\frac{2a+e}{a}} \eta^{-\frac{e}{a}} \rho^{\frac{a+e}{a}} \varepsilon^{-\frac{g}{a}}$$

Comme ΔP_g est proportionnel à L , on a $a = -b$ et la relation (2) peut se ré-écrire sous la nouvelle forme :

$$\frac{\Delta P_g D}{\rho V^2 L} = \left(\frac{\rho V D}{\eta} \right)^h \left(\frac{\varepsilon}{D} \right)^i$$

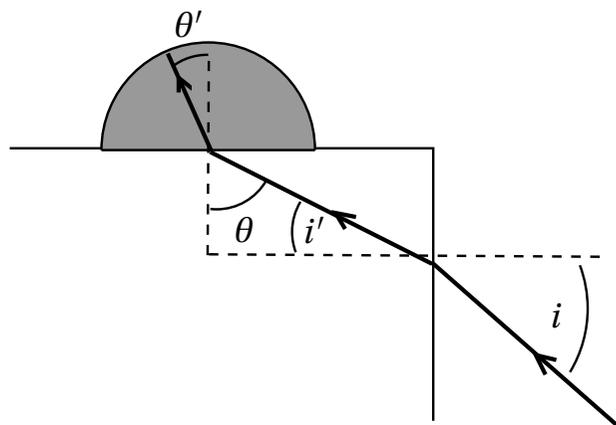
d'où on tire

$$\Delta P_g = \frac{L}{D} \frac{\rho V^2}{2} f \left(\frac{\rho V D}{\eta}; \frac{\varepsilon}{D} \right)$$

La perte de charge linéaire ΔP_g dans une conduite est donc proportionnelle à l'énergie cinétique volumique du fluide $\frac{\rho V^2}{2}$, au rapport $\frac{L}{D}$ et est fonction de la rugosité relative $\frac{\varepsilon}{D}$ et du nombre sans dimension $\frac{\rho V D}{\eta}$ appelé *nombre de Reynolds* en mécanique des fluides.

Problème 2

1. Comme le verre est plus réfringent que l'air ($n_v > 1$), le rayon est plus proche de la normale dans le verre, $i' < i$.



L'angle θ s'obtient par $\theta + i + \frac{\pi}{2} = \pi$ dans le triangle rectangle, d'où $\theta = \frac{\pi}{2} - i$. θ' est donné par la loi de SNELL-DESCARTES $n \sin \theta' = n_v \sin \theta$

2. Il n'y a pas réflexion totale au passage verre – liquide si θ est plus petit que l'angle de réfraction limite θ_{lim} . θ_{lim} correspond au cas $\theta' = \frac{\pi}{2}$, on a donc $n = n_v \sin \theta_{\text{lim}}$.

$\theta \leq \theta_{\text{lim}}$ implique $i' \geq i'_{\text{lim}}$ avec $i'_{\text{lim}} = \frac{\pi}{2} - \theta_{\text{lim}}$ soit $\cos i'_{\text{lim}} = \sin \theta_{\text{lim}}$.

Comme $\sin i = n_v \sin i'$ d'après la loi de SNELL-DESCARTES, $\theta \leq \theta_{\text{lim}}$ impose $i \geq i_{\text{lim}}$ avec $\sin i_{\text{lim}} = n_v \sin i'_{\text{lim}}$, soit

$$\begin{aligned} \sin^2 i_{\text{lim}} &= n_v^2 (1 - \cos^2 i'_{\text{lim}}) \\ &= n_v^2 - n_v^2 \sin^2 \theta_{\text{lim}} \\ &= n_v^2 - n^2 \end{aligned}$$

Finalement $i_{\text{lim}} = \arcsin \sqrt{n_v^2 - n^2}$

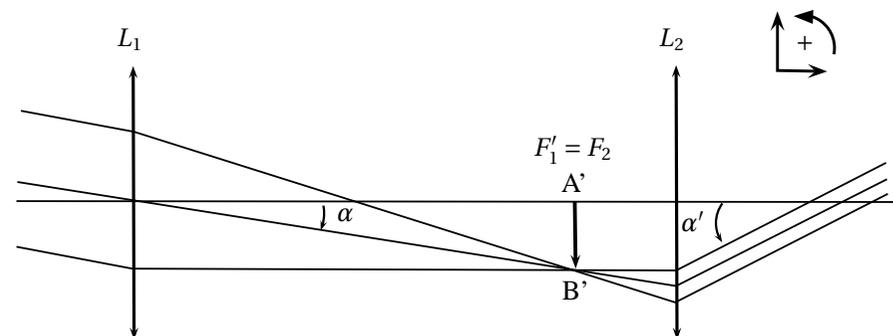
3. On a $n = \sqrt{n_v^2 - \sin^2 i_{\text{lim}}} = 1,426$

Problème 3

I – Observation de Mars à travers une lunette

1. a. L'image d'un objet situé à l'infini, se forme à l'infini. Le foyer est donc à l'infini, ce qu'on traduit par le qualificatif *afocal*. Pour cela, il faut que le foyer image de L_1 coïncide avec le foyer objet de L_2 .

b. On obtient la figure suivante :



c. On placera la pellicule au foyer image d'une lentille supplémentaire placée derrière la lunette si l'on n'a pas accès à l'intérieur de la lunette. Si l'on a accès, on placera la pellicule directement au foyer image de l'objectif.

2. a. L'image est renversée, ce qui se traduira par un grossissement $G < 0$ à la question suivante où on a défini des angles non-orientés et donc des valeurs en radian qui sont algébriques.

b. On a : $\tan \alpha \approx \alpha \approx \frac{\overline{A'B'}}{f'_1} < 0$ et : $\tan \alpha' \approx \alpha' \approx -\frac{\overline{A'B'}}{f'_2} > 0$, donc :

$$G = \frac{\alpha'}{\alpha} = -\frac{f'_1}{f'_2} = -5$$

c. Le passage des rayons lumineux à travers la lentille fait intervenir la réfraction et donc l'indice du verre des lentilles. Celui-ci dépendant de la longueur d'onde, les différentes couleurs ne sont pas déviées de la même façon et donc l'image est irisée et pas très nette. Un miroir ne fait pas intervenir la réfraction mais la réflexion.

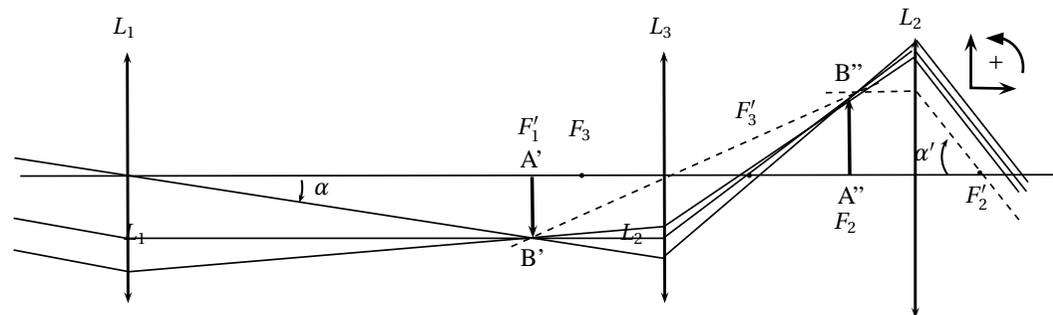
3. a. L'image par L_3 de l'image de la planète par L_1 qui se trouve en F'_1 doit se former en F_2 afin que l'image par L_2 se forme à l'infini. L_3 doit donc conjuguer : F'_1 et F_2 .

b. Par définition : $\gamma_3 = \frac{\overline{A''B''}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{O_3F_2}}{\overline{O_3F'_1}}$. On a également : $\frac{1}{\overline{O_3F_2}} - \frac{1}{\overline{O_3F'_1}} = \frac{1}{f'_3}$.

De la première relation on tire $\overline{O_3F_2}$, puis en remplaçant dans la relation de conjugaison, on obtient :

$$\overline{O_3F'_1} = f'_3 \left(\frac{1}{\gamma_3} - 1 \right)$$

c. On obtient la figure suivante :



d. Cette fois on a : $\tan \alpha \approx \alpha \approx \frac{\overline{A'B'}}{f'_1}$ et : $\tan \alpha' \approx \alpha' \approx -\frac{\overline{A''B''}}{f'_2}$, donc :

$$G' = \frac{\alpha'}{\alpha} = -\frac{f'_1}{\overline{A'B'}} \frac{\overline{A''B''}}{f'_2} = -\gamma_3 G$$

Comme $\gamma_3 < -1$, $|G'| > |G|$; G et G' sont de signe opposé. Comme $G' > 0$ l'image est droite.