DM 3 pour le 14 novembre

OPTIQUE – MÉCANIQUE – CHIMIE

Problème 1

On considère un œil modélisé par une lentille convergente (le cristallin) et un écran (la rétine) tel que la distance lentille-écran soit égale à 15 mm. Pour pouvoir obtenir une image nette sur la rétine, l'œil doit modifier la distance focale du cristallin. On dit qu'il accomode.

On appelle ponctum proximum (PP) de l'œil le point le plus proche que l'œil peut voir nettement et ponctum remotum (PR) le point le plus éloignée que l'œil peut voir nettement.

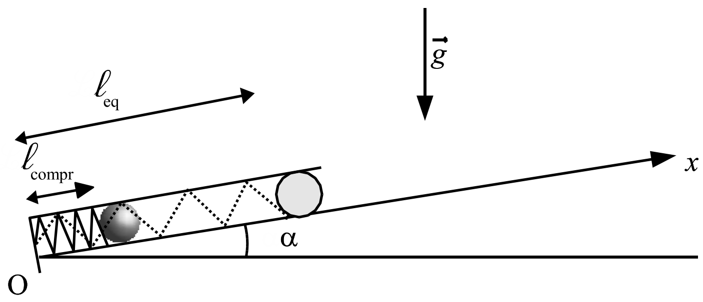
1. Calculer les valeurs extrêmes de la vergence de la lentille pour un ponctum proximum (PP) de 25 cm et un ponctum remotum (PR) infini. Ces valeurs sont celles d'un œil normal sans défauts.
2. L'œil en vieillissant perd son pouvoir d'accommodation. Le PR n'est pas modifié, mais la vergence du cristallin ne peut plus varier que de 4,5 δ, de 1 δet de 0,25 δ, respectivement à 33, 45 et 70 ans. Déterminer les PP correspondants.
3. Un individu est très myope ; son PR est de 11 cm. Un opticien lui propose une paire de lunettes telle que la distance œil-lunettes soit de 1 cm. Quelle vergence doit-il choisir ?

Problème 2

Une boule de flipper en acier de masse m, initialement placée dans son logement cylindrique fixé sur le plateau du flipper, repose contre l'embout d'un ressort de raideur k dont l'autre extrémité est fixée au fond du logement. Le joueur comprime alors le ressort au maximum et à un instant $t = 0$ pris comme origine, il relâche brusquement le ressort.

Le plateau et le cylindre sont inclinés d'un angle α par rapport à l'horizontale. La longueur à vide du ressort est notée ℓ_0 ; la longueur vaut ℓ_{eq} lorsque la bille est à l'équilibre contre l'embout, et diminue jusqu'à ℓ_{comp} quand le ressort est comprimé par le joueur.

On néglige complètement le frottement de la boule sur le plateau, de sorte qu'elle ne peut que glisser sans rouler. On l'assimilera donc à un point matériel de rayon nul. La masse du ressort est supposé négligeable. L'accélération de la pesanteur est g. On travaillera avec l'abscisse x de la boule, mesurée sur l'axe (Ox) d'origine O le point de fixation du ressort et orienté vers le haut du plateau incliné (voir Figure).



1. Faire le bilan des forces appliquées à la boule dans le référentiel galiléen lié au flipper. Montrer que $\ell_{eq} = \ell_0 - \frac{mg\sin\alpha}{k}$.
2. Écrire l'équation différentielle vectorielle du mouvement de la boule pendant la phase de lancer.
3. Montrer que, durant cette phase, $x(t) = \ell_{eq} + \left(\ell_{comp} - \ell_{eq}\right)\cos\omega_0 t$ où ω_0 est une constante à déterminer.
4. Que vaut la force du ressort lorsque la boule perd contact avec l'embout du ressort ? Que vaut alors x ? À quel instant t cela se produit–il ? Quelle est alors l'expression de la vitesse v_0 de la boule ?
5. Lorsque le ressort n'est pas assez comprimé, la boule ne parvient pas à quitter le ressort. Pour quelles valeurs de ℓ_{comp} la boule ne quitte–t–elle pas le ressort ?
6. On suppose que le joueur a suffisamment comprimé le ressort pour que la boule quitte effectivement le ressort. Écrire la nouvelle équation différentielle vérifiée par $x(t)$ après que la boule a quitté le ressort.
7. En déduire la distance maximale x_{max} qu'elle peut parcourir sur le plateau du flipper avant de redescendre (si le plateau est suffisamment grand) en fonction de ℓ_{comp}, ℓ_0, k, m, g et α.
8. Retrouver l'expression de x_{max} par une méthode énergétique.
9. Application numérique : $m = 50$ g ; $g = 9{,}81$ m.s^{-2} ; $\alpha = 20°$; $\ell_0 = 20$ cm. Calculer la raideur du ressort pour obtenir $x_{max} = 2{,}2$ m si $\ell_{eq} - \ell_{comp} = 10$ cm. Que valent alors ℓ_{eq} et ℓ_{comp} ?

Problème 3

On considère dans ce problème un jeu d'enfant composé d'un anneau qui suit un guide de forme variée sous l'action principalement de son poids.

A. Le petit anneau se déplace d'abord sur une partie du guide qui a la forme d'une hélice. Les équations en coordonnées cylindriques de cette hélice rigide d'axe vertical ascendant Oz sont $r = a$ et $z = C\theta$. L'anneau est abandonné sans vitesse initiale au point d'altitude $z = z_0$ et il est assimilé à une particule matérielle mobile sans frottement le long de l'hélice.

1. En utilisant les coordonnées cylindriques, trouver une relation cinématique entre v^2 et $\dot{z}^2$.
2. En exploitant un théorème de dynamique, trouver une relation entre v^2 et z.
3. En déduire que la fonction $z(t)$ vérifie l'équation différentielle :
$$\ddot{z} = -\frac{g}{1+\frac{a^2}{C^2}}$$
où g représente l'accélération de la pesanteur. Calculer $\dot{z}(t)$ puis $z(t)$.
4. Donner l'expression du temps que l'anneau met pour atteindre le plan horizontal $z = 0$ sous l'action de son poids. Quelle est alors la valeur v_0 de la vitesse.

B. La suite du guide est constituée d'une partie en forme de cercle de rayon R placé dans un plan vertical. On supposera que du fait des frottements à la jonction entre les deux parties du guide, l'anneau arrive avec une vitesse nulle sur la partie circulaire.

1. En raisonnant sur les formes d'énergie de l'anneau, montrer que le mouvement est constitué d'oscillations d'amplitude angulaire α_0. On supposera qu'il n'y a pas de frottement sur la partie circulaire et on introduira pour paramétrer le mouvement un nouvel angle θ défini dans le plan du cercle et tel que $\theta = 0$ au point le plus bas du cercle. On ne cherchera pas à déterminer α_0 mais on indiquera à quoi il correspond.
2. Dans le cas où α_0 est suffisamment petit, montrer que le mouvement autour de la position d'équilibre est celui d'un oscillateur harmonique de période $T = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}$
3. Dans le cas où l'approximation précédente n'est plus valable, montrer que la période du mouvement est donnée par la relation :
$$T = 4\sqrt{\frac{R}{2g}}\int_0^{\alpha_0}\frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta-\cos\alpha_0}}$$
4. En réalité, les frottements font diminuer l'amplitude des oscillations. En supposant que les frottements sont de type fluide, établir l'équation différentielle à laquelle obéit $\theta(t)$ et donner l'expression de la solution qui décrit l'évolution temporelle du mouvement.

Problème 4

L'objet de ce problème est d'étudier plusieurs solutions acido-basiques et d'exploiter la méthode de la réaction prépondérante pour réaliser des calculs de pH. Les questions sont très indépendantes les unes des autres.

1. On cherche à déterminer le pH d'une solution dans laquelle on a introduit les ions $H_2PO_4^-$ et les ions Na^+ à la concentration initiale $c_0 = 0,1$ mol.L^{-1}. Comment appelle-t-on une telle solution ?
Pour les applications numériques,on exploitera le fait que l'acide phosphorique étant un triacide de pK$_a$ successifs 2,1 ; 7,2 et 12,1.
En représentant les différentes espèces présentes sur un diagramme, trouver la réaction prépondérante. Quelle est sa constante d'équilibre ?
En considérant cette réaction prépondérante que conclut-on pour la valeur du rapport : $\frac{[H_3PO_4]}{[HPO_4^{2-}]}$. Exprimer ce même rapport en fonction de la concentration des ions oxonium et des constantes d'acidité de l'acide phosphorique. En déduire une expression simple de $[H_3O^+]$ qui ne tient compte que de la réaction prépondérante.
Quelles sont les réactions prépondérantes suivantes possibles. Estimer leur avancement et les comparer à l'avancement de la première réaction prépondérantes. Que peut-on en conclure pour le pH de la solution ?
2. Dans cette question, on envisage le mélange d'acide dichloroacétique de pK$_a$ = 1,3 à la concentration initiale dans le mélange $c_1 = 5\times10^{-3}$ mol.L^{-1} et de sa base conjuguée à la concentration initiale dans le mélange de $c_2 = 7,5\times10^{-3}$ mol.L^{-1}. Quelle est la réaction prépondérante ? Evaluer les différentes concentrations des espèces en ne considérant que cette réaction.

Considérer les différentes réactions suivantes envisageables et estimer leur avancement. Quelle est la nouvelle réaction prépondérante ? En déduire le pH de la solution.

3. Dans la suite, on étudie le dosage de polyacides par la soude. Considérons tout d'abord le diacide H_2A de pK_a successifs pK_{a_1} et pK_{a_2}. Ecrire les deux réactions de dosage. Les deux titrages sont dits disjoints (ils se font successivement) si la deuxième réaction n'est pas réalisée à plus de 1 % alors que la première réaction a été réalisée à 99 %. Montrer qu'une condition nécessaire pour avoir des dosages disjoints est que la différence des pK_a soit supérieure à 4.

   En déduire l'allure de la courbe de dosage de l'acide phosphorique H_3PO_4 de concentration $C_a = 0,1$ mol.L^{-1} de volume $V_a = 10$ mL par une solution de soude de concentration $C_b = 1$ mol.L^{-1}. Expliquer pourquoi on n'observe pas la troisième équivalence.

   Quelles seraient les réactions de dosage si l'on plaçait l'acide phosphorique dans la burette et la soude dans le bécher ?

Commentaires et correction :

Problème 1

Beaucoup d'erreurs sur les applications numériques concernant l'œil presbyte. Ceux qui ont repris la valeur $V_{\text{PR}} = 67\ \delta$ pour calculer le PP ont trouvé 1,7 m à 70 ans alors que le calcul sans arrondi conduit à 4 m !

Dans le calcul de la lentille de la lunette, on ne peut pas supposer que les deux lentilles (lunette et cristallin) sont accolées puisqu'on indique une distance de 1 cm entre les deux. On ne peut pas utiliser le théorème des vergences ici car l'œil et la lentille ne sont pas accolés.

Problème 2

Penser comme d'habitude à signaler le système étudié et le référentiel galiléen car c'est un problème de dynamique.

Sur ce type d'exercice avec ressort, il est indispensable de faire un schéma, voire deux (un à l'équilibre, l'autre en mouvement).

Lorsque ce problème est donné en DS, on voit beaucoup d'erreurs sur l'équation du mouvement (j'ai vu $m\ddot{x} - kx = k\ell_{eq}$) et sur la résolution (j'ai beaucoup vu de $x = \ell_{eq} + A\cos\omega_0 t$ comme solution générale de l'équation). C'est impardonnable et sévèrement sanctionné dans la mesure où l'expression finale était donnée dans l'énoncé.

Il n'y a plus d'action du ressort sur la bille à partir du moment où $\vec{F} = -k(\ell - \ell_0)\vec{e_x} = 0$ donc pour $\ell = \ell_0$ et pas $\ell = \ell_{\text{eq}}$ comme on le lit trop souvent en DS. Pour $\ell_{\text{eq}} \leq \ell \leq \ell_0$, le ressort agit toujours pour soutenir la bille mais cette force est inférieure au poids de la bille.

Problème 3

Bien réussi sur la première partie. Mais le sujet ne proposait aucune figure. Dans la résolution, il est en revanche indispensable de faire une figure pour expliciter les axes utilisés et ne pas commetre d'erreurs.

La question 3. de la partie B. pose plus de difficultés. Attention la vitesse angulaire $\dot{\theta}$ peut être positive ou négative suivant le sens de parcours, il y a donc un ± dans l'expression. À étudier précisément, car le calcul est très classique ; tout cet exercice est applicable au problème du pendule simple.

Problème 4

Problème dont le but est de passer en revue quelques calculs classiques de pH. Il était suffisamment détaillé pour être résolu par des étudiants de série MPSI. Retravailler le dosage à la fin qui n'a pas été bien traité.

Problème 1

1. D'après la relation de conjugaison de Descartes, la vergence vaut :

$$V = \frac{1}{f'} = \frac{1}{\overline{\text{OA'}}} - \frac{1}{\overline{\text{OA}}}$$

Dans le cas du PP, A est à l'infini ; donc $V = 1/\overline{\text{OA'}}$; pour le PP $\overline{\text{OA}} = -d_m = -25$ cm

Les applications numériques conduisent à :

$$\begin{aligned} \text{pour le PP :}\quad f' &= 1{,}4 \text{ cm} \quad \text{et} \quad V = 71\ \delta \\ \text{pour le PR :}\quad f' &= 1{,}5 \text{ cm} \quad \text{et} \quad V = 67\ \delta \end{aligned}$$

2. On a toujours $V_{\text{PR}} = 1/\overline{\text{OA'}}$. Pour le PP $\overline{\text{OA}} = -d_m \neq -25$ cm, et on a : $V_{\text{PP}} = 1/\overline{\text{OA'}} - 1/(-d_m)$ Comme par ailleurs $V_{\max} = V_{\text{PR}} + \delta V$, on en déduit :

$$\boxed{d_m = \frac{1}{\delta V}}$$

Les applications numériques conduisent à :

$$\begin{aligned} \text{à 33 ans :}\quad d_m &= 22 \text{ cm} \\ \text{à 45 ans :}\quad d_m &= 1 \text{ m} \\ \text{à 70 ans :}\quad d_m &= 4 \text{ m} \end{aligned}$$

3. On doit avoir la situation suivante :

$$\text{A}_\infty \overset{\text{Lunette}}{\rightarrow} \text{PR} \overset{\text{Cristallin}}{\rightarrow} \text{rétine}$$

En écrivant la relation de conjugaison pour la lunette, on obtient :

$$V = \frac{1}{\overline{\text{O'A'}}} - \frac{1}{\overline{\text{O'A}_\infty}} = \frac{1}{\overline{\text{O'A'}}} = \frac{1}{\overline{\text{O'O}} + \overline{\text{OA'}}}$$

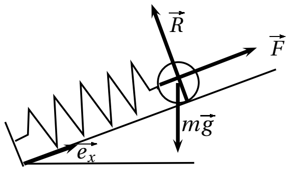
ce qui numériquement conduit à : $\boxed{V = -10\ \delta}$

Problème 2

1. Dans le référentiel galiléen du flipper, l'équilibre de la boule impose :

$$\vec{R} + \vec{F} + m\vec{g} = \vec{0}$$

où $\vec{R}$ est la réaction du support et $\vec{F} = -k\left(\ell_{\text{eq}} - \ell_0\right)\vec{e_x}$ est la force du ressort.



En projetant sur l'axe (Ox) on obtient :

$$-k\left(\ell_{eq}-\ell_0\right)-mg\sin\alpha=0$$

d'où $\boxed{\ell_{eq}=\ell_0-\dfrac{mg\sin\alpha}{k}}$

2. Pendant la phase du lancer, l'équation du mouvement devient :

$$\vec{R}+\vec{F}+m\vec{g}=m\vec{a}$$

soit en projection sur (Ox) :

$$-k\left(x-\ell_0\right)-mg\sin\alpha=m\ddot{x}$$

d'où l'équation différentielle :

$$\ddot{x}+\frac{k}{m}x=\frac{k}{m}\ell_0-g\sin\alpha$$

ou encore avec $\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}}$,

$$\boxed{\ddot{x}+\omega_0^2x=\omega_0^2\ell_{eq}}$$

3. La solution de l'équation différentielle est :

$$x(t)=\ell_{eq}+A\cos\omega_0 t+B\sin\omega_0 t$$

où A et B sont des constantes.
A $t=0$, $x=\ell_{eq}+A=\ell_{comp}$ d'où $A=\ell_{comp}-\ell_{eq}$. Par ailleurs, à $t=0$ $\dot{x}=B\omega_0=0$, d'où $B=0$.
Finalement,

$$\boxed{x(t)=\ell_{eq}+\left(\ell_{comp}-\ell_{eq}\right)\cos\omega_0 t}$$

4. La boule perd contact avec le ressort quand $\vec{F}=0$ soit $x=\ell_0$. Cela implique $\ell_{eq}+\left(\ell_{comp}-\ell_{eq}\right)\cos\omega_0 t=\ell_0$, soit :

$$\boxed{t=\frac{1}{\omega_0}\arccos\left(\frac{\ell_0-\ell_{eq}}{\ell_{comp}-\ell_{eq}}\right)}$$

La vitesse de la boule vaut :

$$\dot{x}=-\omega_0\left(\ell_{comp}-\ell_{eq}\right)\sin\omega_0 t$$

On doit avoir $\dot{x}>0$ donc $\sin\omega_0 t>0$. On peut alors écrire :

$$\dot{x}=-\omega_0\left(\ell_{comp}-\ell_{eq}\right)\sqrt{1-\cos^2\omega_0 t}$$

soit à l'instant où la boule perd contact :

$$\boxed{v_0=-\omega_0\left(\ell_{comp}-\ell_{eq}\right)\sqrt{1-\left(\frac{\ell_0-\ell_{eq}}{\ell_{comp}-\ell_{eq}}\right)^2}}$$

5. $x(t)$ oscille entre ℓ_{comp} et $\ell_{eq}+(\ell_{eq}-\ell_{comp})$. Si $\ell_{eq}+(\ell_{eq}-\ell_{comp})$ est inférieur à ℓ_0, la boule oscille en restant en contact avec le ressort. La condition recherchée est donc

$$\boxed{2\ell_{eq}-\ell_0<\ell_{comp}}$$

6. Pour ℓ_{comp} suffisamment petit, la boule quitte le ressort à $t=t_0=\frac{1}{\omega_0}\arccos\left(\frac{\ell_0-\ell_{eq}}{\ell_{comp}-\ell_{eq}}\right)$. Ensuite, elle n'est soumise qu'à la réaction $\vec{R}$ et à son poids $m\vec{g}$. L'équation du mouvement devient en projection sur Ox :

$$-mg\sin\alpha=m\ddot{x}$$

soit $\boxed{\ddot{x}=-g\sin\alpha}$

7. Par intégration successive par rapport au temps, on déduit :

$$\dot{x}(t)=-g\sin\alpha\,(t-t_0)+v_0$$
$$x(t)=-g\sin\alpha\frac{(t-t_0)^2}{2}+v_0(t-t_0)+\ell_0$$

où on a exploité le fait qu'à $t=t_0$, on a $x=\ell_0$ et $\dot{x}=v_0$.

La hauteur maximale est atteinte pour $t_{\max}$ tel que $\dot{x} = 0$ soit

$$t_{\max} - t_0 = \frac{v_0}{g \sin\alpha}$$

d'où

$$x_{\max} = -g\sin\alpha \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{g^2\sin^2\alpha} + \frac{v_0^2}{g\sin\alpha} + \ell_0$$

Finalement

$$\boxed{x_{\max} = \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{g\sin\alpha} + \ell_0}$$

8. Le théorème de l'énergie cinétique appliqué entre t_0 et $t_{\max}$ s'écrit :

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2(t_{\max}) - \frac{1}{2}mv_0^2 = W(m\vec{g}) = -mg\,(h_{\max} - h_0)$$

avec $h_{\max} - h_0 = (x_{\max} - \ell_0)\sin\alpha$. Ce qui permet d'atteindre $x_{\max}$.

9. Application numérique :
En utilisant l'expression de v_0 on obtient

$$x_{\max} = \ell_0 + \frac{1}{2g\sin\alpha}\frac{k}{m}\left(\ell_{\text{eq}} - \ell_{\text{comp}}\right)^2 \times \left[1 - \left(\frac{mg\sin\alpha}{k(\ell_{\text{eq}} - \ell_{\text{comp}})}\right)^2\right]$$

ce qui s'écrit encore :

$$\frac{(x_{\max} - \ell_0)}{k} = \frac{\left(\ell_{\text{eq}} - \ell_{\text{comp}}\right)^2}{2mg\sin\alpha} + \frac{mg\sin\alpha}{2k^2}$$

d'où l'équation en $1/k$:

$$\frac{1}{k^2} - \frac{2\,(x_{\max} - \ell_0)}{mg\sin\alpha}\frac{1}{k} + \left(\frac{\ell_{\text{eq}} - \ell_{\text{comp}}}{mg\sin\alpha}\right)^2 = 0$$

de solution

$$\frac{1}{k} = \frac{x_{\max} - \ell_0}{mg\sin\alpha} \pm \sqrt{\left(\frac{x_{\max} - \ell_0}{mg\sin\alpha}\right)^2 - \left(\frac{\ell_{\text{eq}} - \ell_{\text{comp}}}{mg\sin\alpha}\right)^2}$$

d'où

$$\boxed{k = \frac{mg\sin\alpha}{x_{\max} - \ell_0 \pm \sqrt{(x_{\max} - \ell_0)^2 - \left(\ell_{\text{eq}} - \ell_{\text{comp}}\right)^2}}}$$

Les solutions obtenus sont :

$$k_1 = 0{,}042 \text{ N/m}$$
$$k_2 = 67 \text{ N/m}$$

On obtient alors

$$\ell_{\text{eq1}} = \ell_O - \frac{mg\sin\alpha}{k_1} = -3{,}8 \text{ m impossible !}$$
$$\ell_{\text{eq2}} = \ell_O - \frac{mg\sin\alpha}{k_2} = 19{,}7 \text{ cm}$$

Finalement

$$\boxed{\ell_{\text{comp}} = \ell_{\text{eq2}} - \left(\ell_{\text{eq}} - \ell_{\text{comp}}\right) = 9{,}7 \text{ cm}}$$

Problème 3

A. 1. En coordonnés cylindriques, la vitesse est donnée par :

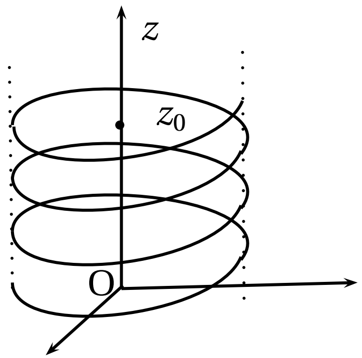
$$\vec{v} = \dot{r}\overrightarrow{e_r} + r\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta} + \dot{z}\overrightarrow{e_z}$$

Comme $r = a$, on a $\dot{r} = 0$, par ailleurs de $z = C\theta$, on tire $\dot{\theta} = \frac{\dot{z}}{C}$, ce qui conduit à :

$$\vec{v} = \frac{a\dot{z}}{C}\overrightarrow{e_\theta} + \dot{z}\overrightarrow{e_z}$$

d'où

$$\boxed{v^2 = \left[\frac{a^2}{C^2} + 1\right]\dot{z}^2}$$



2. Le théorème de l'énergie cinétique appliqué à l'anneau dans le référentiel supposé galiléen du jeu s'écrit :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}mv^2 - 0 &= W(\vec{R}) + W(m\vec{g})\\ &= 0 + mg(z_0 - z)\end{aligned}$$

On en déduit :

$$\boxed{v^2 = 2g(z_0 - z)} \tag{1}$$

3. En égalant les deux relations précédentes, on obtient :

$$\left[\frac{a^2}{C^2} + 1\right]\dot{z}^2 = 2g(z_0 - z)$$

ce qui, après dérivation par rapport au temps conduit à :

$$2\left[\frac{a^2}{C^2} + 1\right]\dot{z}\ddot{z} = -2g\dot{z}$$

En simplifiant par $\dot{z} \neq 0$, on trouve :

$$\boxed{\ddot{z} = -\frac{g}{1 + \frac{a^2}{C^2}}}$$

Pour obtenir $\dot{z}(t)$ puis $z(t)$, on intègre par rapport au temps en tenant compte des conditions initialees, d'où :

$$\boxed{\dot{z} = -\frac{g}{1 + \frac{a^2}{C^2}}t}$$

et

$$\boxed{z = -\frac{g}{1 + \frac{a^2}{C^2}}\frac{t^2}{2} + z_0}$$

4. On atteint $z = 0$ pour

$$z_0 = \frac{g}{1 + \frac{a^2}{C^2}}\frac{t^2}{2}$$

soit

$$\boxed{t_{z=0} = \sqrt{\frac{2z_0}{g}\left[\frac{a^2}{C^2} + 1\right]}}$$

Pour connaître la vitesse, il suffit de reprendre l'expression (1) :

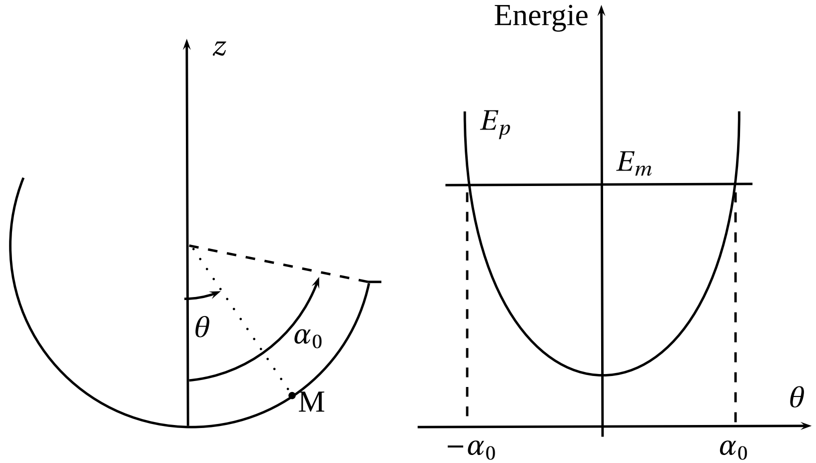
$$\boxed{v_0 = \sqrt{2gz_0}}$$

B. 1. L'énergie potentielle est de la forme mgz où z suit le guide circulaire. L'énergie mécanique est constante car il n'y a qu'une force qui ne dérive pas d'une énergie potentielle : la réaction $\vec{R}$ dont le travail est nul. On peut représenter toutes les formes d'énergie en fonction de l'angle θ.

En prenant comme référence l'altitude du départ du guide circulaire repéré par α_0, l'énergie potentielle est donnée par :

$$E_p = mgR(\cos\alpha_0 - \cos\theta)$$

On obtient donc une cuvette de potentiel, ce qui explique que l'on osille entre les valeurs $\theta = -\alpha_0$ et $\theta = \alpha_0$ où l'énergie cinétique $E_c = E_m - E_p$ est nulle.



2. L'énergie mécanique est égale à :

$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 + mgR(\cos\alpha_0 - \cos\theta) \tag{2}$$

En dérivant par rapport au temps, on trouve :

$$\frac{dE_m}{dt} = 0 = mR^2\dot{\theta}\ddot{\theta} + mgR\dot{\theta}\sin\theta$$

En simplifiant par $mR^2\dot{\theta} \neq 0$ et en considérant des petits angles avec $\sin\theta \simeq \theta$, on obtient l'équation d'un oscillateur harmonique :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{R}\theta = 0$$

de solution $\theta = \alpha_0 \cos\omega t$.
On observe donc des oscillations de période :

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}}$$

3. La valeur de l'énergie mécanique s'obtient en considérant l'instant d'arrivée sur la partie circulaire où $v \simeq 0$ et $\theta = \alpha_0$; on a alors :

$$E_m = E_c + E_p = 0 + 0 = 0$$

L'équation (2) devient alors :

$$\frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 + mgR(\cos\alpha_0 - \cos\theta) = 0$$

d'où on déduit :

$$\dot{\theta} = \pm\sqrt{\frac{2g}{R}(\cos\theta - \cos\alpha_0)}$$

Dans le cas où l'anneau est dans une phase montante durant un quart de période où θ augmente, on garde le signe positif et on peut alors écrire :

$$1 = \frac{\dot{\theta}}{\sqrt{\frac{2g}{R}(\cos\theta - \cos\alpha_0)}}$$

En exploitant la différentielle $d\theta = \dot{\theta}dt$ et en intégrant la relation précédente par rapport au temps sur un quart de période, on a :

$$\int_0^{\frac{T}{4}} dt = \int_0^{\alpha_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\frac{2g}{R}(\cos\theta - \cos\alpha_0)}}$$

On déduit la relation cherchée :

$$\boxed{T = 4\sqrt{\frac{R}{2g}}\int_0^{\alpha_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\alpha_0}}}$$

4. Dans ce cas, le théorème de la puissance mécanique conduit à :

$$\frac{dE_m}{dt} = mR^2\dot{\theta}\ddot{\theta} + mgR\dot{\theta}\sin\theta = -h(R\dot{\theta}).(R\dot{\theta})$$

en supposant une force de frottement de la forme $-h\vec{v}$.
En simplifiant par $mR^2\dot{\theta} \neq 0$ et en considérant des petits angles avec $\sin\theta \simeq \theta$, on obtient l'équation d'un oscillateur harmonique amorti :

$$\ddot{\theta} + \frac{h}{m}\dot{\theta} + \frac{g}{R}\theta = 0$$

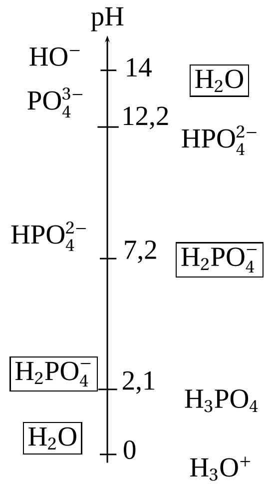
Si l'on observe des oscillations, on est dans le cas d'un régime pseudo-périodique dont la forme de la solution est :

$$\boxed{\theta = e^{-\lambda t}\left[A\cos\Omega t + B\sin\Omega t\right]}$$

avec $\lambda = \dfrac{h}{2m}$ et $\Omega = \dfrac{\sqrt{\Delta}}{2} = \dfrac{1}{2}\sqrt{\left(\dfrac{h}{m}\right)^2 - 4\left(\dfrac{g}{R}\right)}$

Problème 4

1. La solution de NaH_2PO_4 est une solution amphotère car les ions $H_2PO_4^-$ sont à la fois acide et basique.



La réation prépondérante, entre l'acide le plus fort et la base la plus forte, est donc :

	$2\ H_2PO_4^-$	$= H_3PO_4$	$+ HPO_4^{2-}$
$t = 0$	c_0	0	0
t_{eq}	$c_0 - x$	x	x

La constante d'équilibre de cette réaction est :

$$\begin{aligned} K &= \frac{[H_3PO_4][HPO_4^{2-}]}{[H_2PO_4^-][H_2PO_4^-]} \\ &= \frac{[H_3PO_4]}{[H_2PO_4^-][H_3O^+]}\frac{[HPO_4^{2-}][H_3O^+]}{[H_2PO_4^-]} \\ &= \frac{K_2}{K_1} = 10^{-5,1} \end{aligned}$$

Il s'agit d'une réaction peu avancée vers la droite.
Le rapport $\dfrac{[H_3PO_4]}{[HPO_4^{2-}]}$ est égal à :

$$\frac{[H_3PO_4]}{[HPO_4^{2-}]} = \frac{x}{x} = 1$$

Par ailleurs, on a :

$$\begin{aligned} \frac{[H_3PO_4]}{[HPO_4^{2-}]} &= \frac{[H_3O^+]^2[H_3PO_4]}{[H_2PO_4^-][H_3O^+]}\frac{[H_2PO_4^-]}{[HPO_4^{2-}][H_3O^+]} \\ &= \frac{[H_3O^+]^2}{K_1K_2} \end{aligned}$$

On en déduit :

$$[H_3O^+]^2 = K_1K_2$$

d'où

$$\boxed{\mathrm{pH} = \frac{\mathrm{pK_1} + \mathrm{pK_2}}{2} = 4,7}$$

L'avancement de la réaction prépondérante est donnée par la loi de GULBERG et WAAGE

$$K = \frac{x^2}{(c_0 - x)^2} \simeq \frac{x^2}{c_0^2}$$

car le réactif $H_2PO_4^-$ réagit peu ($x \ll c_0$). On en déduit une estimation de x :

$$x = c_0\sqrt{K} = 2.8 \times 10^{-4}\ \mathrm{mol/L}$$

Les réactions prépondérantes suivantes sont :

$$H_2PO_4^- + H_2O = HPO_4^{2-} + H_3O^+$$

dont l'avancement est estimé à

$$x_1 \simeq [H_3O^+] = 10^{-4,7} = 2 \times 10^{-5}\ \mathrm{mol/L}$$

et la réaction

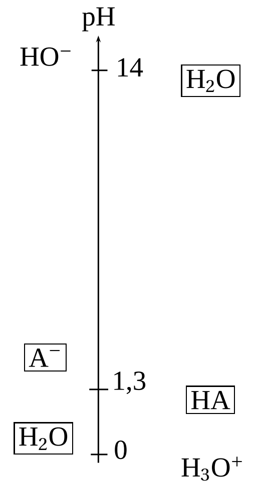
$$H_2PO_4^- + H_2O = H_3PO_4 + HO^-$$

dont l'avancement est estimé à

$$x_2 \simeq [HO^-] = \frac{10^{-14}}{10^{-4,7}} = 5 \times 10^{-10}\ \mathrm{mol/L}$$

On peut en première approximation négliger x_1 et x_2 devant x et garder la valeur de pH obtenue précédemment

2. Notons HA l'acide et A^- sa base conjuguée. On a la situation suivante :



La réaction prépondérante est

$$HA + A^- = A^- + HA$$

qui ne modifie pas le mélange. Les concentrations restent donc les mêmes que celles de l'énoncé.
Les réactions envisageables sont alors :

$$\begin{gathered} HA + H_2O = A^- + H_3O^+ \text{ de constante } K_1 = K_a = 10^{-1,3} \\ A^- + H_2O = HA + HO^- \text{ de constante } K_2 = K_e/K_a = 10^{-12,7} \end{gathered}$$

On enviseage uniquement la première de ces deux réactions.

	HA	$+ H_2O$	$= A^-$	$+ H_3O^+$
$t = 0$	c_1	excès	c_2	0
t_{eq}	$c_1 - h$	excès	$c_2 + h$	h

La loi de GULDBERG et WAAGE donne :

$$K_1 = \frac{(c_2+h)h}{c_1-h}$$

On obtient une équation du second degré en h :

$$h^2 + (c_2+K_1)h - c_1K_1 = 0$$

de solution positive :

$$h = \frac{1}{2}\left(-(c_2+K_1) + \sqrt{(c_2+K_1)^2 + 4c_1K_1}\right)$$
$$= 4\times 10^{-3}\ \text{mol/L}$$

Cet avancement permet de déduire la valeur du pH :

$$\boxed{\text{pH} = 2,4}$$

3. Pour le diacide H_2A, les deux réactions successives sont :

$$H_2A + H_2O = HA^- + H_3O^+$$
$$HA^- + H_2O = A^{2-} + H_3O^+$$

Les deux dosages sont disjoints si la première réaction est faite à 99 % avant que le seconde ne soit faite à 1 %, ce qui se traduit par

$$[H_2A] = \frac{1}{100}[HA^-] \quad \text{et} \quad [A^{2-}] < \frac{1}{100}[HA^-]$$

On en déduit pour l'inégalité :

$$\frac{K_{a_1}}{K_{a_2}} = \frac{[HA^-][HA^-]}{[H_2A][A^{2-}]} > 10^4$$

ce qui donne aussi

$$\boxed{\text{pK}_{a_2} - \text{pK}_{a_1} > 4}$$

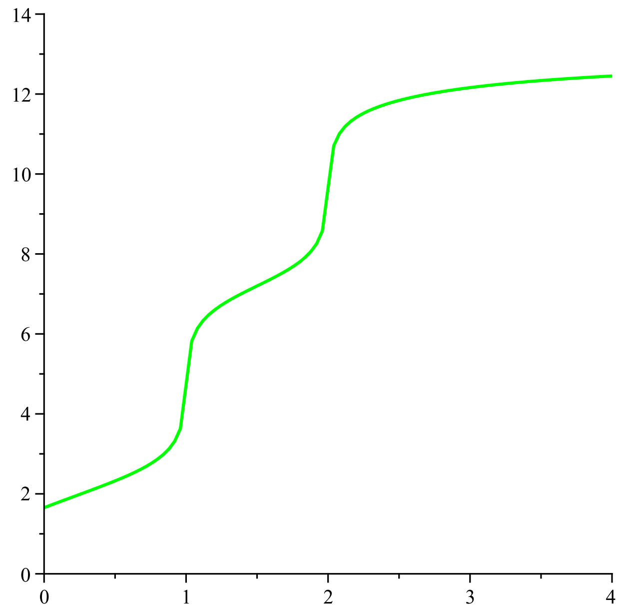
Dans le cas de l'acide phosphorique les 3 pK_a respectent les conditions d'écart précédent. On s'attend donc à observer les trois réactions de dosage suivantes :

$$(1)\ H_3PO_4 + HO^- = H_2PO_4^- + H_2O$$
$$(2)\ H_2PO_4^- + HO^- = HPO_4^{2-} + H_2O$$
$$(3)\ HPO_4^{2-} + HO^- = PO_4^{3-} + H_2O$$

Les constantes d'équilibre de ces trois réactions sont

$$K_1 = \frac{1}{K_b} = \frac{K_{a1}}{K_e} = 10^{11,9}$$
$$K_2 = \frac{K_{a2}}{K_e} = 10^{6,8}$$
$$K_3 = \frac{K_{a3}}{K_e} = 10^{1,8}$$

La dernière réaction n'est pas quantitative, elle ne permet pas un dosage de HPO_4^{2-}. On observe donc deux sauts de pH : l'un pour le dosage de H_3PO_4, l'autre pour le dosage de $H_2PO_4^-$, comme le confirme la figure ci-contre issu d'une simulation où l'on a porté le pH en fonction de $x = V/V_{eq}$, V_{eq} désignant le volume à l'équivalence.



Dans le cas où la base est dans le bécher, le pH va diminuer car on ajoute de l'acide. Comme le milieu est basique au départ, cela correspond au domaine de PO_4^{3-} et la première réaction de dosage est :

$$H_3PO_4 + 3\ HO^- = PO_4^{3-} + 3\ H_2O$$

A la première équivalence, on n'a plus d'ions HO^- mais uniquement des ions PO_4^{3-}, qui peuvent réagir avec l'acide phosphorique selon :

$$H_3PO_4 + 2\ PO_4^{3-} = 3\ HPO_4^{2-}$$

A la seconde équivalence, il n'y a plus d'ions PO_4^{3-} mais uniquement des ions HPO_4^{2-} qui peuvent réagir selon :

$$H_3PO_4 + HPO_4^{2-} = 2\ H_2PO_4^-$$