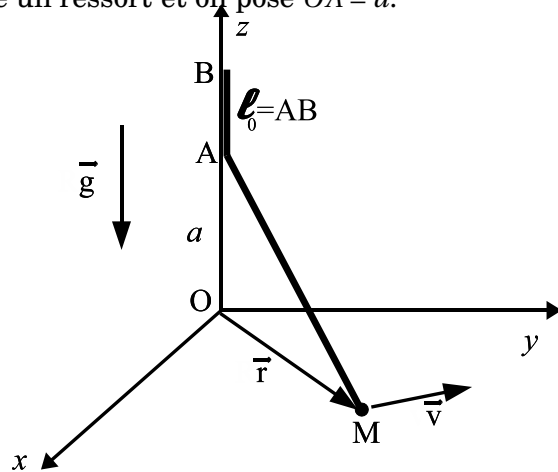


Problème 1

Un élastique E est accroché en B, passe en A dans un petit anneau et porte en son extrémité M une masse ponctuelle pesante m . On note k la raideur de l'élastique et $\ell_0 = AB$ sa longueur à vide. On suppose que l'élastique se comporte comme un ressort et on pose $OA = a$.



1. M se déplace dans l'espace. On repère sa position par le vecteur $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$. Montrer que le vecteur $\vec{r}$ obéit à l'équation différentielle :

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} + \frac{k}{m} \vec{r} = \frac{k}{m} \overrightarrow{OA} + \vec{g}$$

2. On suppose qu'à $t = 0$, $\vec{r} = \vec{r}_0$ et $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}_0$ où le vecteur $\vec{r}_0$ a pour coordonnées cartésiennes (x_0, y_0, z_0) et le vecteur $\vec{v}_0$ les coordonnées $(\dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0)$. Montrer que l'équation différentielle vérifiée par $\vec{r}$ admet pour solution :

$$\vec{r} = \overrightarrow{OA} + \frac{\vec{g}}{\omega_0^2} + \left(\vec{r}_0 - \overrightarrow{OA} - \frac{\vec{g}}{\omega_0^2} \right) \cos \omega_0 t + \frac{\vec{v}_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t$$

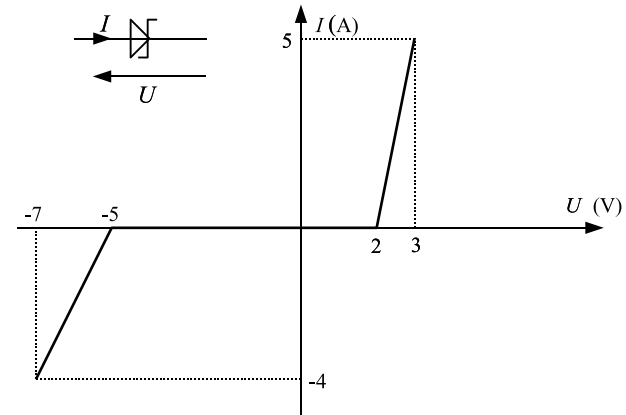
où ω_0 est une constante que l'on déterminera. On pourra pour cela faire des projections sur les axes (Ox) , (Oy) et (Oz) .

3. Étudier le cas particuliers $\vec{v}_0 = \vec{0}$.

Problème 2

On considère un générateur de force électromotrice $e = 4,5 \text{ V}$ et de résistance interne $r = 15 \Omega$.

1. Le générateur alimente un conducteur ohmique de résistance $R = 45 \Omega$. Déterminer par une méthode graphique l'intensité qui traverse la résistance ainsi que la tension à ses bornes. Vérifier le résultat par le calcul.
2. Exprimer la puissance reçue par la résistance R en fonction de e , R et r . Pour quelle valeur de R la puissance reçue par la résistance est maximale? On pourra pour cela dériver l'expression de la puissance. Calculer la puissance maximale reçue dans ce cas.



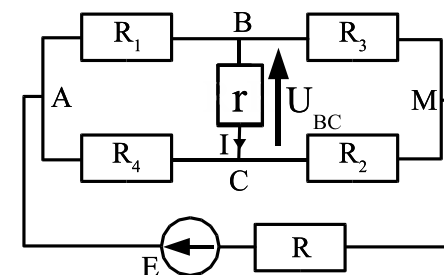
3. Le générateur est branché sur une diode Zéner dont la caractéristique est donnée ci-dessus. Préciser l'intensité qui circule dans le circuit en fonction du branchement réalisé.

Problème 3

Un pont de WHEATSTONE est constitué de quatre résistances R_1 , R_2 , R_3 et R_4 formant un carré. Aux bornes de l'une des diagonales est branché un détecteur d'intensité appelé galvanomètre de résistance interne r . Aux bornes

de l'autre diagonale un générateur de tension de force électromotrice E et de résistance interne R alimente le circuit.

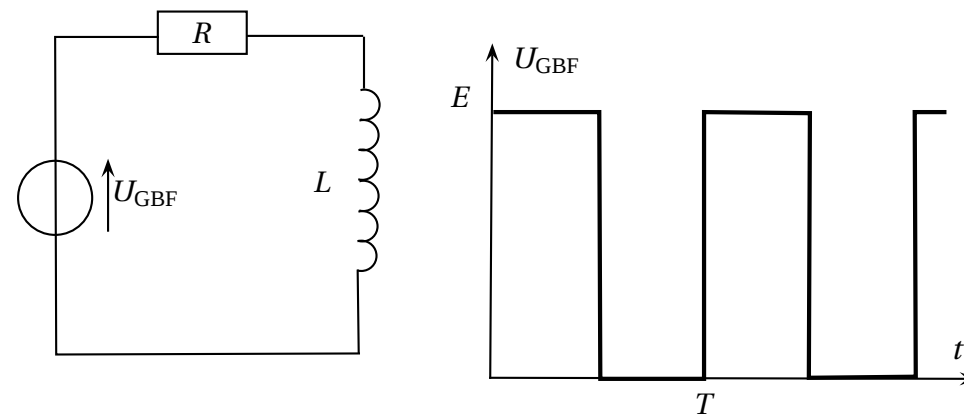
1. On suppose tout d'abord que le courant I est nul dans le galvanomètre. Écrire les lois de KIRCHHOFF pour ce circuit. En déduire une relation simple portant sur les résistances R_1 , R_2 , R_3 et R_4 . Lorsque cette relation est vérifiée, on dit que le pont est équilibré.
2. On suppose que les résistances R_2 et R_3 valent chacune $10\ \Omega$ et que R_1 est une résistance étalon réglable alors que R_4 est une résistance inconnue à mesurer. Les valeurs de R_1 , R_2 et R_3 sont connues avec une précision de $0,1\ \%$. Lorsque le pont est équilibre $R_1 = 12\ \Omega$. Calculer R_4 en précisant son incertitude.
3. La condition d'équilibre du pont n'étant plus réalisée, appliquer la loi des nœuds en terme des potentiels (ou le théorème de MILLMANN) à ce montage et montrer que l'on obtient un système de trois équations à trois inconnues. *On ne cherchera pas à résoudre ce système.* Comment pourrait-on en déduire l'intensité I ?
4. On enlève le galvanomètre et on cherche à déterminer le générateur de THÉVENIN équivalent au montage entre B et C en appliquant le théorème de THÉVENIN que qu'on admettra ici. Pour simplifier les calculs, on supposera que $R = 0$ dans toute cette question.
 - (a) La résistance du générateur de Thévenin équivalent, R_{Th} , est égale à la résistance entre B et C lorsqu'on éteint la source. Calculer R_{Th} .
 - (b) La f.e.m. du générateur de Thévenin équivalent, E_{Th} , est égale à la tension U_{BC} (on rappelle qu'il n'y a rien de brancher entre B et C). Calculer E_{Th} .
 - (c) Remplacer le circuit entre B et C par le générateur de Thévenin équivalent et replacer le galvanomètre. En déduire la valeur de l'intensité I qui le traverse en fonction de R_{Th} et E_{Th} .
 - (d) Retrouver la condition d'équilibre du pont.



Problème 4

Une bobine réelle est un dipôle constitué par enroulement cylindrique d'un fil électrique. Elle est caractérisée par son auto-inductance L et sa résistance interne r . La bobine est dite parfaite si sa résistance interne est négligeable.

1. Donner la relation entre le courant i qui traverse une bobine parfaite et la tension u_L à ses bornes. (On précisera à l'aide d'un schéma les conventions d'orientation adoptées pour i et u_L). Les valeurs usuelles des inductances rencontrées s'échelonnent de quelques milliHenrys à quelques Henrys.
2. On se propose d'étudier la réponse d'un circuit (RL) à une tension en créneaux délivrée par un générateur basse fréquence (G.B.F.). Le circuit représenté sur la figure 1 comporte une bobine parfaite d'inductance L , un résistor de résistance R et un G.B.F. délivrant une tension en créneaux u représentée sur la figure.



- On définit la constante de temps τ , exprimée en secondes, du circuit (RL) par une relation du type $\tau = L^\alpha \cdot R^\beta$ où α et β sont deux constantes réelles. Par analyse dimensionnelle rapide, déterminer la valeur des exposants α et β .
- Pour $0 \leq t \leq \frac{T}{2}$, établir l'équation différentielle régissant les variations de l'intensité i dans le circuit. L'intégrer en justifiant soigneusement la détermination de la (des) constante(s) d'intégration. En déduire l'expression de $u_L(t)$. Tracer l'allure des courbes représentatives de $i(t)$ et de $u_L(t)$ en précisant les valeurs vers lesquelles ces fonctions tendent en régime permanent, ainsi que l'équation des tangentes à l'origine.
- Déterminer complètement l'expression de $i(t)$ et de $u_L(t)$ pour $\frac{T}{2} \leq t \leq T$.
- Le G.B.F. est réglé sur la fréquence $f = 1,0$ kHz, la bobine a pour inductance $L = 1,0$ H et $R = 1,0 \cdot 10^3 \Omega$. Comparer la période T de la tension délivrée par le G.B.F. et la constante de temps τ du circuit. Tracer qualitativement l'évolution des graphes de $i(t)$ et de $u_L(t)$ sur quelques périodes. Commenter.

Problème 5

Les ions fer (III) en solution avec les ions thiocyanates SCN^- forment un cation complexe $[\text{FeSCN}]^{2+}$ rouge de constante de formation globale β_1 telle que $\log \beta_1 = 3$. La coloration rouge n'est perceptible que tant que la concentration en $[\text{FeSCN}]^{2+}$ est supérieure à $10^{-5,5} \text{ mol.L}^{-1}$.

- On réalise une solution contenant initialement les ions fer (III) à la concentration $10^{-3} \text{ mol.L}^{-1}$ et des ions thiocyanates à la concentration $10^{-1} \text{ mol.L}^{-1}$. Quelles sont les concentrations des différentes espèces à l'équilibre? Illustrer la situation sur un diagramme de prédominance vertical.
- On reprend la solution précédente et on lui ajoute progressivement des ions fluorure F^- (venant d'une solution aqueuse de NaF). Les ions fluorure réagissent avec les ions fer (III) pour former le complexe $[\text{FeF}]^{2+}$ de constante de formation β'_1 telle que $\log \beta'_1 = 5,5$. Expliquer ce qu'on observe. Illustrer la situation sur un diagramme de prédominance vertical.

Problème 6

La salinité de l'eau de mer est la masse totale de substances solides dissoutes par kilogramme d'eau de mer. Cette masse est très difficile à déterminer en pratique. En 1902, une commission internationale a adopté un protocole opératoire dont découle la définition de la « salinité 1902 » : « la salinité est la masse en grammes de substances solides contenues dans un kilogramme d'eau de mer, les carbonates étant transformés en oxydes, les bromures et iodures remplacés par leur équivalent en chlorures, les matières organiques oxydées ». La détermination de cette salinité 1902 est trop difficile et trop lente pour pouvoir être utilisée sur le terrain. Jusqu'en 1961, la salinité a été déduite de la chlorinité.

Les constituants présents dans l'eau de mer avec une concentration supérieure à 1 mg.kg^{-1} (concentrations données par kg d'eau de mer pour une salinité égale à $35,000 \text{ g.kg}^{-1}$) sont regroupés dans le tableau ci-dessous :

Espèces	en g.kg^{-1}	en mol.kg^{-1}
H_2O	964,85	53,56
Na^+	10,77	0,4685
Mg^{2+}	1,290	$5,308 \cdot 10^{-2}$
Ca^{2+}	0,4121	$1,028 \cdot 10^{-2}$
K^+	0,399	$1,021 \cdot 10^{-2}$
Sr^{2+}	$7,9 \cdot 10^{-3}$	$9,0 \cdot 10^{-5}$
B_{total}	$4,5 \cdot 10^{-3}$	$4,2 \cdot 10^{-4}$
Cl^-	19,354	0,5459
SO_4^{2-}	2,712	$2,823 \cdot 10^{-2}$
$\text{HCO}_3^{2-} + \text{CO}_3^{2-}$	0,118 à 0,146	$1,94 \cdot 10^{-3}$ à $2,40 \cdot 10^{-3}$
Br^-	$6,73 \cdot 10^{-2}$	$8,42 \cdot 10^{-4}$
F^-	$1,3 \cdot 10^{-3}$	$7,0 \cdot 10^{-5}$

Protocole de M. Knudsen (1901) de dosage des ions chlorure dans l'eau de mer :

prélever 15,0 mL d'un échantillon d'eau de mer et y ajouter 10 gouttes (0,5 mL) de solution de chromate de potassium $0,4 \text{ mol.L}^{-1}$. Doser avec une solution de nitrate d'argent préparée en ayant ajouté 37,1 g de nitrate d'argent AgNO_3 dans 1,00 L d'eau distillée.

- Un litre d'eau de mer contenant environ 20 g d'ions chlorure, justifier que AgCl précipite avant Ag_2CrO_4 . Calculer la concentration des ions

chlorure quand Ag_2CrO_4 précipite. Comment l'équivalence du dosage est-elle mise en évidence ?

- Le pH de l'eau de mer est d'environ 8. Montrer que le dosage décrit ci-dessus n'est pas perturbé par la précipitation de l'hydroxyde d'argent et que l'ion chromate CrO_4^{2-} est bien majoritaire devant son acide conjugué.
- L'échantillon de 15 mL pèse 15,3 g. Le volume du nitrate d'argent versé à l'équivalence du dosage est de 37,8 mL. Justifier que la présence des ions bromure dans l'eau de mer ne permet pas de déterminer la concentration en ions chlorure de cette eau mais seulement la concentration en ions halogénure. Calculer cette concentration. En déduire la chlorinité de la solution définie par « la masse d'une quantité de chlore équivalente à la quantité totale d'halogènes contenus dans d'eau de mer » (Sørensen 1902).
- En 1884, une analyse de 77 échantillons d'eau de mer prélevés à différentes profondeurs dans divers océans montre que les proportions relatives des constituants de l'eau de mer sont sensiblement constantes quelle que soit la salinité (loi de Dittmar). À l'aide du tableau, calculer la chlorinité d'une eau de mer de salinité égale à 35,000 g.kg⁻¹. En déduire la salinité de l'échantillon étudié ci-dessus.

Données :

Produits de solubilité

AgCl (blanc) ; $K_{s1} = 2.10^{-10}$

Ag_2CrO_4 (rouge) ; $K_{s2} = 1.10^{-12}$

AgBr (blanc) ; $K_{s3} = 5.10^{-13}$

$\text{Ag}(\text{OH})$ (brun) ; $K_{s4} = 2.10^{-8}$

Couple acide-base

$\text{HCrO}_4^- / \text{CrO}_4^{2-}$; $\text{p}K_a = 6,4$

Problème 7

Dosage des ions iodure par argentimétrie

Découvert en 1812, le diiode (I_2) est un solide noir qui se transforme à température ambiante en vapeur de couleur violette. Jadis obtenu à partir d'algues, le diiode est maintenant principalement issu du traitement de saumures de certains puits de pétrole. Nous consommons quotidiennement de

l'iode (sous forme d'iodure (I^-)), le sel de table est iodé pour des raisons diététiques : le manque d'iode provoque des troubles thyroïdiens. L'élément iode se rencontre très souvent en chimie car il existe dans différents états d'oxydation ce qui conduit à de nombreuses réactions d'oxydoréduction et à son utilisation pour la réalisation de solutions titrantes. Sous la forme d'iodure, l'iode est dosé par argentimétrie en mettant à profit la très faible solubilité dans l'eau de l'iodure d'argent.

Données et recommandations pour l'ensemble de l'épreuve

Toutes les équations bilan des réactions chimiques seront écrites en respectant les règles de l'IUPAC : les coefficients stoechiométriques sont des nombres entiers qui n'admettent pas de diviseur commun.

L'état de référence utilisé pour exprimer l'activité des espèces en solution aqueuse est une solution de l'espèce de molarité $C_o = 1 \text{ mol.L}^{-1}$ se comportant comme une solution infiniment diluée. Dans ces conditions l'activité de l'espèce i est : $a_i = \gamma_i C_i / C_o$. Pour toute l'épreuve on considérera que les espèces sont suffisamment diluées pour avoir $\gamma_i = 1$.

Masse molaire atomique des éléments exprimée en g.mol⁻¹.

O : 16,00 ; K : 39,10 ; I : 126,90

Constante des gaz parfaits : $R = 8,3145 \text{ J.mol}^{-1}.\text{K}^{-1}$.

$T(\text{K}) = \theta(^{\circ}\text{C}) + 273,15$

Potentiel standard, à 25°C, par rapport à l'électrode normale à hydrogène : $E^{\circ}(\text{Ag}^+/\text{Ag}) = 0,800\text{V}$

Produit de solubilité de l'iodure d'argent (AgI) à 25°C : $K_s = 10^{-16}$

$\frac{2,302RT}{F} = 0,060 \text{ V}$ (à 25°C)

Volume d'une goutte versée avec la burette : 0,05 mL

L'argentimétrie est une technique analytique qui met à profit la faible solubilité dans l'eau des sels d'argent. Cette technique est particulièrement adaptée au dosage des iodures.

- Ecrire l'équation bilan de la réaction de formation du précipité d'iodure d'argent et l'expression littérale du produit de solubilité, K_s , de ce sel.
- Donner l'expression littérale et la valeur numérique de la solubilité (exprimée en mol.L⁻¹) de l'iodure d'argent dans l'eau pure à 25°C.
- A 25°C, on réalise le dosage potentiométrique décrit sur la figure ci-

dessous en mesurant la différence de potentiel entre l'électrode d'argent et l'électrode de référence ($\Delta E = E_{Ag} - E_r$) en fonction du volume de solution titrante versée.

3-1. Ecrire l'équation bilan traduisant la réaction de dosage.

3-2. Montrer qu'une électrode d'argent qui plonge dans une solution contenant des ions Ag^+ est une électrode indicatrice de la concentration en ion argent ($[Ag^+]$).

3-3. Sachant que le volume équivalent est de 6,20 mL, quelle est la concentration C_0 de la solution d'iodure de potassium ?

3-4. Montrer que, dès la première goutte de solution titrante versée, la précipitation de l'iodure d'argent se produit.

3-5. Donner l'expression littérale et la valeur numérique de la différence de potentiel ΔE mesurée à l'équivalence.

3-6. Après avoir versé 6,15 mL de solution titrante, calculer :

3-6-1. La valeur numérique de la concentration molaire en ion I^- et celle en ion Ag^+ dans le bécher.

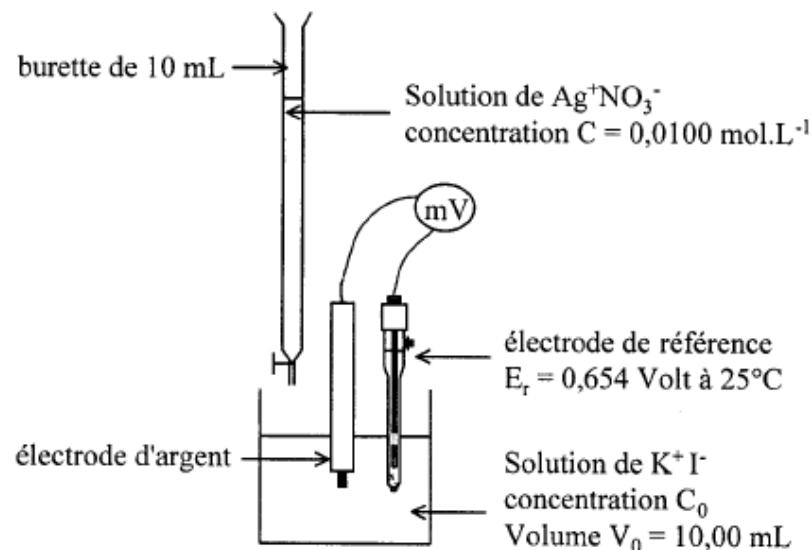
3-6-2. La valeur numérique de la différence de potentiel ΔE entre les deux électrodes.

3-7. Après avoir versé 6,25 mL de solution titrante, calculer :

3-7-1. La valeur numérique de la concentration molaire en ion Ag^+ et celle en ion I^- dans le bécher.

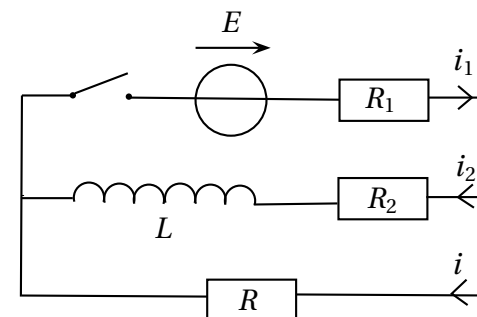
3-7-2. La valeur numérique de la différence de potentiel ΔE entre les deux électrodes.

3-8. Expliquer pourquoi l'équivalence est facilement détectable avec précision.



Problème 8

À $t = 0$, on ferme l'interrupteur du circuit de la figure ci-dessous.



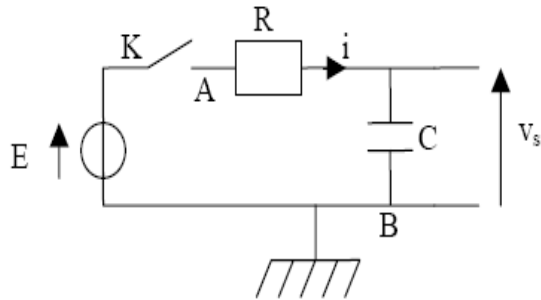
1. Calculer $i_1(0)$, $i_2(0)$ et $i(0)$.
2. Calculer directement (sans résoudre d'équation différentielle) $i_{1\infty}$, $i_{2\infty}$, i_{∞} , c'est à dire au bout d'un temps très long.

3. Établir l'équation différentielle vérifiée par $i(t)$ et calculer $i_1(t)$, $i_2(t)$ et $i(t)$ à tout instant.

Problème 9

Première partie : Charge d'un condensateur à travers une résistance

Un dipôle comporte entre deux bornes A et B une résistance R et un condensateur de capacité C placés en série. On place aux bornes A et B du dipôle un générateur de tension idéal de force électromotrice constante E et un interrupteur K . Initialement le circuit est ouvert et le condensateur déchargé. Soit v_s la tension aux bornes du condensateur. A l'instant $t = 0$, on ferme l'interrupteur K .



1/ Quel est le comportement du condensateur au bout d'un temps très long (infini) après la fermeture de l'interrupteur ? En déduire les valeurs correspondantes de v_s et de l'intensité i dans le circuit au bout d'un temps très long.

2/ On pose $\tau = RC$. On se place à $t \geq 0$. Quelle est l'unité de τ dans le système international ? Démontrer le résultat. Quel est le nom donné à cette constante ?

3.1/ Etablir l'équation différentielle à laquelle obéit $v_s(t)$.

3.2/ Etablir l'expression de la tension $v_s(t)$ au cours du temps (pour $t \geq 0$). Trouver à partir de cette expression la valeur de $v_s(t)$ pour un temps très long. Vérifier que cette valeur correspond au comportement du condensateur prévu dans la question 1.

3.3/ Donner l'allure de la courbe représentative de la fonction $v_s(t)$ en précisant son asymptote. Calculer la valeur de la pente de la courbe à $t = 0$. Tracer

la tangente à l'origine et calculer les coordonnées du point d'intersection de cette tangente avec l'asymptote.

3.4/ Déterminer, en fonction de τ , l'expression du temps t_1 à partir duquel la charge du condensateur diffère de moins de 1% de sa charge finale.

4/ Déterminer l'expression de l'intensité $i(t)$ du courant qui circule dans le circuit pour $t \geq 0$. (L'orientation de $i(t)$ est précisée sur le schéma).

Deuxième partie : Etude énergétique de la charge du condensateur

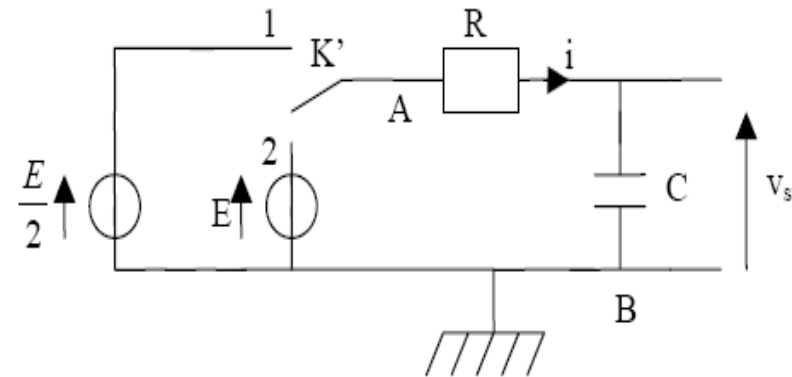
5.1 / Exprimer l'énergie E_C emmagasinée par le condensateur lorsque sa charge est terminée en fonction de C et de E .

5.2/ Déterminer, à partir des résultats de la partie précédente, l'expression de l'énergie E_J dissipée par effet Joule dans la résistance au cours de la charge. On exprimera E_J en fonction de C et de E .

5.3/ Montrer, à partir des résultats de la partie précédente, que l'énergie E_g fournie par le générateur au cours de la charge est égale à $E_g = CE^2$. Vérifier la conservation de l'énergie au cours de la charge du condensateur.

5.4/ Définir et calculer le rendement énergétique ρ de la charge du condensateur par le générateur à travers une résistance non inductive.

6/ Afin d'améliorer le rendement de la charge du condensateur, on effectue celle-ci en deux étapes. On considère pour cela le montage suivant :



A la date $t = 0$, le condensateur étant déchargé, on ferme l'interrupteur K' dans la position 1 (phase 1). Lorsque la charge sous la tension $\frac{E}{2}$ est termi-

née, on bascule K' dans la position 2 (phase 2) et on procède à la charge du condensateur sous la tension E .

6.1/ Quelle est l'énergie E_{g1} fournie par le générateur au cours de la première phase de charge ? Quelle est l'énergie E_{C1} emmagasinée par le condensateur au cours de la première phase de charge ? Ces résultats pourront être déduits des questions précédentes.

6.2/ Quelle est l'équation différentielle vérifiée par la tension v_s au cours de la deuxième phase de charge ? En prenant pour origine des temps ($t = 0$) la date à laquelle on bascule l'interrupteur de la position 1 dans la position 2, déterminer l'expression de $v_s(t)$ en fonction du temps au cours de la deuxième phase de charge.

6.3/ En déduire, en fonction du temps, l'expression de l'intensité $i(t)$ qui traverse le circuit au cours de la deuxième phase de charge.

6.4/ En utilisant les expressions de v_s et de i en fonction du temps, déterminer : l'expression de l'énergie E_{g2} fournie par le générateur au cours de la deuxième phase de charge en fonction de C et E . l'expression de l'énergie E_{C2} emmagasinée par le condensateur au cours de la deuxième phase de charge en fonction de C et E .

6.5/ Calculer le rendement ρ' de la charge du condensateur lorsque cette dernière est effectuée en deux étapes.

7/ Compte tenu des rendements obtenus lors de la charge du condensateur avec les deux méthodes précédentes, indiquer comment il faudrait procéder pour faire tendre le rendement de la charge du condensateur vers 1. Aucun calcul n'est demandé dans cette question.

Problème 10

On considère un circuit RLC série alimenté par un générateur de fem $e(t) = E\sqrt{2}\cos\omega t$.

1. On s'intéresse aux courbes de résonance aux bornes de la bobine et du condensateur.

- a. On note $\underline{U}_C = u_{Cm}e^{j\varphi_C}$ l'amplitude complexe de la tension complexe aux bornes du condensateur. Donner l'expression de $\underline{U}_C$ en fonction de ω , E , R , L et C .

- b. Introduire le facteur de qualité Q et la pulsation propre ω_0 du circuit. Donner l'expression de $\underline{U}_C$ en fonction de ω , E , Q et ω_0 .
- c. Etudier le comportement de la fonction $|\underline{U}_C(\omega)|$. Tracer la fonction pour plusieurs valeurs de Q . Montrer que cette courbe n'admet un maximum que lorsque $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$. Quelle est la valeur de ω au maximum. Que vaut $|\underline{U}_C|$ au maximum lorsque le facteur de qualité prend de grandes valeurs. Pourquoi qualifie-t-on Q de *facteur de surtension* ?
- d. Etudier la fonction $\varphi_C(\omega)$ et tracer sa courbe représentative.
- e. Reprendre la même étude aux bornes de la bobine.
2. On souhaite faire un bilan énergétique du circuit. On introduit $\mathcal{P}_G$, la puissance fournie par le générateur, $\mathcal{P}_J$, la puissance dissipée par effet Joule dans la résistance R , $\mathcal{E}_L$, l'énergie emmagasinée dans la bobine, $\mathcal{E}_C$, l'énergie emmagasinée dans le condensateur.
- a. A partir de l'écriture de la loi des mailles, établir une relation entre les grandeurs précédemment introduites.
- b. Que devient cette relation lorsqu'on en calcule la valeur moyenne ? On notera $\langle X \rangle$ la valeur moyenne de la grandeur instantanée X . Commentaires.
3. On veut étudier la fonction $\langle \mathcal{P}_G \rangle(\omega)$. Pour cela, on introduit $\underline{I} = i_m e^{j\varphi}$ l'amplitude complexe de l'intensité qui parcourt le circuit.
- a. Retrouver les valeurs de i_m et φ par le calcul.
- b. Retrouver ces valeurs en exploitant un diagramme de FRESNEL.
- c. Donner l'expression de $\langle \mathcal{P}_G \rangle(\omega)$ en fonction de $i_m(\omega)$, E , R , L et C , puis en fonction de ω , E , R , L et C .
- d. Tracer la courbe de $\langle \mathcal{P}_G \rangle(\omega)$ en fonction de ω . Cette courbe montre le phénomène de résonance en puissance. Pour quelle pulsation y-a-t'il résonance ?
- e. Comment définir la largeur de la courbe de résonance en puissance pour qu'on retrouve la même bande passante que pour la courbe de résonance en intensité ? Quelle définition de largeur vous semble la plus naturelle ?