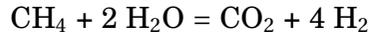


# Problème 1

## I. Production du dihydrogène

Le dihydrogène peut être obtenu par électrolyse de l'eau, mais sa production la plus importante en tonnage est issue du vaporéformage du méthane. Cette transformation, réalisée à 800°C sous une pression de 35 bar, peut être décrite par l'équation de réaction suivante :



Dans les conditions opératoires, tous les constituants sont sous forme gazeuse. Pour isoler le dihydrogène, il faut éliminer le dioxyde de carbone du mélange gazeux. Une des solutions adoptées est d'absorber  $\text{CO}_{2(g)}$  par une solution aqueuse basique. La base employée est l'ion carbonate  $\text{CO}_3^{2-}$ .

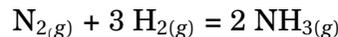
Données :

$\text{p}K_{A1}(\text{CO}_2/\text{HCO}_3^-) = 6,3$  et  $\text{p}K_{A2}(\text{HCO}_3^-/\text{CO}_3^{2-}) = 10,3$  à  $T = 298 \text{ K}$ .

1- Écrire l'équation de la réaction entre le dioxyde de carbone et les ions carbonate en solution aqueuse. Justifier que cette réaction soit totale dans les conditions usuelles. Dans quel domaine de pH se trouve le système en fin de réaction si les réactifs ont été introduits initialement en proportions stœchiométriques ?

## II- Aspects cinétiques de la synthèse de l'ammoniac

Le dihydrogène produit industriellement est principalement utilisé pour la synthèse de l'ammoniac, schématisée par l'équation de réaction suivante :



On utilise un catalyseur solide à base de fer pour réaliser cette transformation. Le mécanisme de cette transformation est très complexe, mais peut être schématisé par les étapes suivantes (l'espèce notée A représente un site d'adsorption vacant à la surface du catalyseur, l'espèce notée B représente une molécule de diazote adsorbée sur un site du catalyseur et l'espèce notée C un atome d'azote adsorbé sur un site du catalyseur) :

(1)  $\text{A} + \text{N}_2 \rightleftharpoons \text{B}$  équilibre établi à tout instant de constante  $K_1$

(2)  $\text{A} + \text{B} \rightleftharpoons 2\text{C}$  étape de constante de vitesse  $k_2$  et  $k_{-2}$

(3)  $2\text{C} + 3\text{H}_2 \rightleftharpoons 2\text{A} + 2\text{NH}_3$  équilibre de constante  $K_3$

Remarques : L'étape (2) est l'étape cinétiquement déterminante. En réalité, l'étape (3) est la succession d'au moins cinq étapes bimoléculaires correspondant à des équilibres établis à tout instant. Le traitement de ce système complexe donne le même résultat que si l'on considère uniquement que C,  $\text{H}_2$ , A et l'ammoniac sont en équilibre selon l'équation (3).

On note  $\theta_A$  le taux de sites vacants,  $\theta_B$  le taux de sites occupés par l'espèce B et  $\theta_C$  le taux de sites occupés par l'espèce C.

$$\theta_X = \frac{\text{nombre de sites occupés par l'espèce X}}{\text{nombre total de sites d'adsorption du catalyseur}} \text{ avec } X = \text{B ou C.}$$

Pour simplifier, nous admettrons que dans les équations cinétiques, ce sont les taux de sites  $\theta_X$  qui interviennent à la place des concentrations pour les espèces A, B et C, et que dans les équations thermodynamiques, les activités de ces espèces sont égales à ces mêmes taux de sites.

2- Donner l'expression de la vitesse  $v$  de la transformation, définie comme la vitesse globale de l'étape (2), en fonction de  $\theta_A$ ,  $\theta_B$  et  $\theta_C$ .

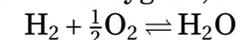
3- Écrire les conditions d'équilibre relatives aux équations (1) et (3). En déduire l'expression de la vitesse de la transformation en fonction des pressions partielles en  $\text{N}_2$ ,  $\text{H}_2$  et  $\text{NH}_3$  ainsi que de  $\theta_A$ . La réaction possède-t-elle un ordre global ? des ordres partiels ?

4- Expliquer pourquoi l'étape (3) ne peut correspondre à deux actes élémentaires opposés.

## III- Dihydrogène et piles à combustible – Fonctionnement schématique d'une pile à combustible SOFC

La rentabilité économique et l'innocuité écologique de la production d'énergie à partir des piles à combustible dihydrogène doivent prendre en compte l'ensemble de la chaîne. Cinq types de piles à combustible sont à l'étude et, parmi elles, les piles à électrolyte solide (SOFC, solid oxide fuel cell) présentent l'avantage de permettre la production de dihydrogène par vaporéformage in situ, grâce à leur température de fonctionnement élevée.

Une pile à combustible est constituée d'une anode alimentée en combustible et d'une cathode alimentée en comburant, ces deux électrodes étant séparées par un électrolyte, conducteur ionique et isolant électrique. Dans le cas d'une pile alimentée en dihydrogène et dioxygène, l'équation de réaction s'écrit :



5- Écrire la demi-équation de la réaction se produisant à l'anode et celle de la réaction se produisant à la cathode dans le cas où l'électrolyte est de l'eau acidifiée.

6- On tient compte à présent du fait que l'électrolyte est un oxyde solide et non de l'eau : les porteurs de charge étant des anions  $O^{2-}$ , les demi-équations ne sont plus ajustées avec des ions  $H^+$ . Écrire à nouveau les demi-équations d'oxydoréduction.

7- Faire un schéma légendé de la pile.

8- Quels peuvent être les avantages et les inconvénients d'une telle pile à combustible?

## Problème 2

Le problème analyse une expérience classique de travaux pratiques destinée à mettre en évidence un phénomène de résonance en mécanique. On considère un ressort vertical à spires non jointives dans son domaine de linéarité. Il est caractérisé par une masse linéique  $\mu$ , une constante de raideur  $k$ , et un corps  $M$ , de masse  $m$ , est accroché à son extrémité inférieure. L'étude mécanique est faite dans le référentiel ( $\mathcal{R}$  du laboratoire supposé galiléen et les déplacements envisagés sont verticaux.

On utilise les notations suivantes :

$$\begin{aligned} \vec{e}_x, & \text{ vecteur unitaire définissant la direction de l'axe } x'x \\ & \text{ et le sens de la verticale descendante,} \\ \vec{g} &= g\vec{e}_x, \text{ champ de pesanteur uniforme,} \\ \omega_0^2 &= \frac{k}{m} \end{aligned}$$

### Partie I - Oscillations sans frottement

I.A - Oscillations libres (on prend  $\mu = 0$ )

L'extrémité supérieure du ressort est fixe.

I.A.1) Faire un bilan des forces appliquées à  $M$ .

I.A.2) Déterminer l'équation différentielle ( $E_1$ ) vérifiée par  $x$ , déplacement de  $M$  par rapport à la position d'équilibre, et sa solution pour les conditions initiales suivantes :  $x(0) = x_0$ ,  $\dot{x}(0) = 0$ .

I.A.3) Proposer deux méthodes indépendantes permettant d'accéder à la valeur de  $k$ .

I.A.4) Définir les deux énergies potentielles à considérer, en fonction de  $k$ ,  $m$ , et en prenant comme référence la position d'équilibre  $x = 0$ .

I.A.5) En déduire l'énergie potentielle totale  $E_p$ , en fonction de  $k$  et de  $x$ , et l'énergie mécanique  $E$  en prenant les conditions initiales du I.A.2.

I.A.6) Tracer sur un même diagramme les courbes représentant les variations de  $E_p$  et de  $E$  en fonction de  $x$  et montrer comment on peut y lire la valeur de l'énergie cinétique  $E_c$ .

I.A.7) Montrer qu'en valeur moyenne il y a équipartition de l'énergie entre l'énergie cinétique et l'énergie potentielle.

I.B - Oscillations forcées (on prend  $\mu = 0$ )

Grâce à un système bielle-manivelle on impose à l'extrémité supérieure du ressort le déplacement  $X(t)\vec{e}_x = a\cos\omega t\vec{e}_x$ ,  $a$  et  $\omega$  étant des constantes.

I.B.1) Déterminer l'équation différentielle ( $E_2$ ) du mouvement de  $M$  et montrer que l'existence de la sollicitation extérieure revient à introduire dans le bilan établi au I.A.2 un terme supplémentaire  $F_{sup} = kX(t)$ .

I.B.2) On s'intéresse au cas  $\omega \neq \omega_0$ .

a) Donner la solution de ( $E_2$ ) avec les conditions initiales  $x(0) = 0$ ,  $\dot{x}(0) = 0$ . Mettre le résultat sous la forme du produit de deux fonctions trigonométriques dont on exprimera les pulsations  $\omega_1$  et  $\omega_2$ , ( $\omega_1 > \omega_2$ ), en fonction de  $\omega$  et de  $\omega_0$ .

b) Tracer l'allure de la courbe représentant les variations de  $x$  en fonction du temps  $t$  pour  $\omega = 1,2\omega_0$ , définir et déterminer la période des battements en fonction de  $\omega_2$ .

c) Exprimer la variation d'énergie mécanique par unité de temps  $\frac{dE}{dt}$ . L'énergie se conserve-t-elle? Augmente-t-elle? Diminue-t-elle? Varie-t-elle en moyenne?

I.B.3) On s'intéresse au cas  $\omega = \omega_0$ .

a) Déterminer la solution de ( $E_2$ ) avec les conditions initiales  $x(0) = 0$ ,  $\dot{x}(0) = 0$ , par passage à la limite  $\omega \rightarrow \omega_0$  de la solution obtenue au I.B.2-a).

b) Tracer la courbe représentant les variations de  $x$  en fonction du temps  $t$ . Donner l'équation des deux demi-droites enveloppes de la courbe.

c) Quel est le phénomène mis ainsi en évidence? Qu'est-ce qui en limite l'acuité dans la réalité?

d) Déterminer  $E(t)$  et sa variation par unité de temps sur l'intervalle  $[t, t + T_0]$  tel que  $\sin\omega_0 t = 1$  et  $T_0 = 2\pi/\omega_0$ . Conclure quant à la signification énergétique

du phénomène.

## Partie II - Oscillations forcées avec amortissement fluide

Grâce à un dispositif approprié on soumet  $M$  à une force de frottement fluide  $\vec{F}_f$  de la forme  $\vec{F}_f = -h\vec{v}$ ,  $h$  étant une constante positive et  $\vec{v}$  représentant la vitesse de  $M$ . On impose toujours le déplacement  $X(t)\vec{e}_x = a \cos \omega t \vec{e}_x$  à l'extrémité supérieure du ressort. On note  $Q = \frac{m\omega_0}{h}$  le facteur de qualité et on prend toujours  $\mu = 0$ .

II.A - Déterminer l'équation différentielle ( $E_3$ ) du mouvement de  $M$ .

II.B - On s'intéresse à la solution en régime forcé. Quel est, en fonction de  $\omega_0$  et  $Q$ , l'ordre de grandeur du temps  $\tau$  nécessaire pour considérer seulement cette solution ?

II.C - Montrer que l'amplitude  $A$  du déplacement de  $M$  s'exprime sous la forme :

$$A = \frac{a}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2 Q^2}}}$$

II.D - Donner une interprétation physique du mouvement de  $M$  aux hautes et basses fréquences.

II.E - Montrer que, si  $Q$  est supérieur à une valeur minimale  $Q_{min}$  à déterminer,  $A$  prend une valeur maximale pour une pulsation  $\omega_r$  à exprimer en fonction de  $\omega_0$  et  $Q$ .

II.F - Déterminer l'expression  $V$  de l'amplitude de la vitesse de  $M$  en fonction de  $a$ ,  $\omega$ ,  $\omega_0$  et  $Q$ .

II.G - Donner une interprétation physique de la variation de  $V$  aux hautes et basses fréquences.

II.H - Montrer que  $V$  prend une valeur maximale pour une pulsation indépendante de  $Q$ .

II.I - Grâce à un capteur de position de  $M$ , on mesure une tension  $V_{pp}$  proportionnelle à l'amplitude  $A$ . À partir des valeurs expérimentales suivantes tracer les courbes représentant les variations de  $V_{pp}$  (mV) et de  $f.V_{pp}$  (V.Hz) en fonction de la fréquence  $f$  (mHz). Échelles : 1 V  $\leftrightarrow$  2 cm, 1 V.Hz  $\leftrightarrow$  1 cm, 1 Hz  $\leftrightarrow$  4 cm.

$V_{pp}$	1844	1844	1844	1844	1906	2063	2281	2500
$f$	156,3	213,9	287,8	412,4	615,4	869,6	1026	1250
$f.V_{pp}$	0,228	0,394	0,531	0,760	1,173	1,794	2,340	3,125
$V_{pp}$	2906	3438	4094	4531	4938	5750	5906	5531
$f$	1429	1613	1786	1887	1923	2128	2198	2299
$f.V_{pp}$	4,153	5,545	7,312	8,550	9,496	12,24	12,98	12,71
$V_{pp}$	4188	3281	3250	2813	2344	1812	1469	1094
$f$	2500	2597	2632	2778	2857	3077	3361	3636
$f.V_{pp}$	10,47	8,521	8,554	7,814	6,697	5,575	4,937	3,978

II.J - À l'évolution de quelle grandeur physique accède-t-on en traçant la courbe représentant les variations de  $f.V_{pp}$  en fonction de  $f$  ?

II.K - Définir la bande passante  $\Delta f$ . Déterminer graphiquement  $\Delta f$  et la fréquence propre  $f_0$  associées à la fonction de transfert  $H_V : f \rightarrow f.V_{pp}$ . En déduire le facteur de qualité  $Q$ . Comparer ces valeurs aux résultats donnés par un logiciel de modélisation :  $V_{pp}(0) = 1811 \pm 59$  mV,  $f_0 = 2228 \pm 12$  mHz,  $Q = 3,183 \pm 0,140$ . Que penser du modèle proposé pour interpréter l'expérience ? Sachant que  $m = 0,275$  kg, calculer  $h$ .

II.L - Déterminer le schéma électrique équivalent, c'est-à-dire décrit par une équation différentielle du même type que ( $E_3$ ), association d'une résistance  $R$ , d'une inductance  $L$ , d'une capacité  $C$ , alimentée par une source de courant idéale  $I \cos \omega t$ . Dresser un tableau d'analogies électromécaniques.

## Partie III - Phénomènes de propagation

En augmentant la fréquence du système exciteur on observe que des spires paraissent nettes et d'autres paraissent floues. Pour interpréter ces observations on améliore la modélisation précédente en prenant en compte la masse du ressort, mais on néglige son poids devant toutes les autres forces.

III.A - Montrer que l'association de deux ressorts, de constantes de raideur  $k_1$  et  $k_2$ , mis bout à bout, est équivalente à un ressort de raideur donnée par la relation :

$$\frac{1}{k_{eq}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$$

En déduire la constante de raideur  $K$  d'une tranche, comprise entre les abscisses  $x$  et  $x + \Delta x$ , d'un ressort de longueur à vide  $L$  ( $0 \leq x \leq L$ ) et de constante de raideur  $k$  en fonction de  $k$ ,  $L$  et  $\Delta x$ .

III.B - On note  $\xi(x, t)$  le déplacement du point d'abscisse  $x$  à l'instant  $t$  par rapport à sa position d'équilibre. Montrer que la force  $F$  exercée par le tronçon  $[x, L]$  sur le tronçon  $[0, x]$  vaut :

$$F = kL \frac{\partial \xi}{\partial x}$$

III.C - En appliquant la relation fondamentale de la dynamique à la tranche  $[x, x + \Delta x]$  et en négligeant son poids devant  $F$ , montrer que  $\xi(x, t)$  vérifie l'équation ( $E_4$ ) :

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = 0,$$

et montrer que  $c = \sqrt{\frac{kL}{\mu}}$ . Quelle est la dimension de  $c$  ?

III.D - Soit  $\varepsilon(x, t) = \xi(x, t) - \xi_{eq}(x)$  où  $\xi_{eq}(x)$  représente le déplacement du point d'abscisse  $x$  à l'équilibre lorsque  $M$  est accroché. En appliquant la relation

fondamentale de la dynamique à la masse  $m$ , déterminer la relation liant les dérivées partielles  $\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t^2}$ ,  $\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}$  et  $\frac{\partial \varepsilon}{\partial x}$  en  $x = L$ .

III.E - On recherche des solutions de ( $E_4$ ) de la forme  $\varepsilon(x, t) = f(x) \cos \omega t$ . En utilisant la notation complexe  $\underline{\varepsilon}(x, t) = \underline{A}(x) e^{j\omega t}$ , montrer en utilisant ( $E_4$ ) que  $\underline{A}(x)$  peut se mettre sous la forme :

$$\underline{\alpha} \cos \frac{\omega x}{c} + \underline{\beta} \sin \frac{\omega x}{c}$$

où  $\underline{\alpha}$  et  $\underline{\beta}$  sont deux constantes complexes.

III.F - En utilisant les conditions aux limites déterminer  $\underline{\alpha}$  et  $\underline{\beta}$ .

III.G - Montrer que :

$$\underline{A}(L) = \frac{a}{\cos \Phi - \frac{\omega^2 \sin \Phi}{\omega_0^2 \Phi} + j \frac{\omega \sin \Phi}{\omega_0 Q \Phi}} \quad \text{où} \quad \Phi = \frac{\omega L}{c}.$$

Montrer qu'on peut retrouver le résultat du II.C.

Pour  $Q \gg 1$  déterminer l'équation donnant les fréquences de résonance.

# Commentaires et correction :

## Problème 1

Peu d'erreurs sur ce problème. Ici on obtient une réaction sans ordre car on ne peut pas mettre l'expression de la vitesse sous forme d'un produit des  $\theta_i$ .

La pile à combustible présentée est une idée pour l'avenir car ses rejets sont propres ; il reste à maîtriser la production et le stockage du dihydrogène.

## Problème 2

Problème de mécanique du concours Centrale série TSI. Classique mais pas toujours réussi. Les erreurs les plus fréquentes sont :

- la définition de  $x$  n'a pas été bien comprise, notamment lors de l'oscillation forcée. Il faut faire des figures pour illustrer ces définitions.
- l'énergie potentielle élastique du ressort est  $\frac{1}{2}k(\ell - \ell_0)^2$  et pas  $\frac{1}{2}k(\ell - \ell_{eq})^2 = \frac{1}{2}kx^2$ .

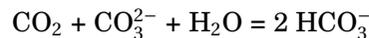
Attention ! Ici on obtient une énergie potentielle totale de  $\frac{1}{2}kx^2$  quand on tient compte de l'énergie potentielle du ressort et de l'énergie potentielle de pesanteur.

- la démonstration du ressort équivalent à l'association des deux ressorts est à reprendre ; elle a souvent été mal traitée. Pour le point entre deux ressorts, on invoque le principe de l'action et de la réaction et pas la relation fondamentale de la dynamique.

## Problème 1

### I. Production du dihydrogène

1- la réaction entre  $\text{CO}_2$  et  $\text{CO}_3^{2-}$  est :



La loi de GULDBERG et WAAGE conduit à :

$$K = \frac{[\text{HCO}_3^-]^2}{[\text{CO}_2][\text{CO}_3^{2-}]} = \frac{[\text{HCO}_3^-][\text{H}_3\text{O}^+]}{[\text{CO}_2]} \frac{[\text{HCO}_3^-]}{[\text{CO}_3^{2-}][\text{H}_3\text{O}^+]}$$

soit  $K = \frac{K_{A1}}{K_{A2}} = 10^{-6,3+10,3} = 10^4$ . La réaction est quantitative.

Le tableau d'avancement s'écrit pour cette réaction :

mol.L <sup>-1</sup>	CO <sub>2</sub>	+ CO <sub>3</sub> <sup>2-</sup>	+ H <sub>2</sub> O	= 2 HCO <sub>3</sub> <sup>-</sup>
initiales	C <sub>0</sub>	C <sub>0</sub>		
sol.équivalente	$\varepsilon$	$\varepsilon$		2C <sub>0</sub>

La valeur de  $\varepsilon$  se déduit de la constante d'équilibre  $K = \frac{(2C_0)^2}{\varepsilon^2}$  d'où  $\varepsilon = \frac{2C_0}{K}$

Les réactions suivantes sont les réactions des acides et bases avec l'eau, dont l'avancement est donné par les concentrations en  $\text{H}_3\text{O}^+$  et  $\text{HO}^-$ . Faisons l'hypothèse que ces avancements sont négligeables devant l'avancement  $2C_0$  de la réaction précédente. On peut alors utiliser les valeurs du tableau d'avancement pour obtenir les concentrations des espèces.

Le pH est donné par la relation  $\text{pH} = \text{pK}_A + \log \frac{[\text{base}]}{[\text{acide}]}$  pour l'un des couples de  $\text{CO}_2$ . On a ainsi :

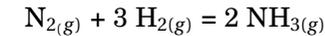
$$\begin{aligned} \text{pH} &= \text{pK}_{A1} + \log \frac{[\text{HCO}_3^-]}{[\text{CO}_2]} = \text{pK}_{A1} + \log \frac{2C_0}{2C_0/K} \\ &= \text{pK}_{A1} + \frac{1}{2}(\text{pK}_{A2} - \text{pK}_{A1}) \end{aligned}$$

Finalement  $\boxed{\text{pH} = \frac{1}{2}(\text{pK}_{A2} + \text{pK}_{A1}) = 8,3}$ .

On vérifie bien que  $[\text{H}_3\text{O}^+]$  et  $[\text{HO}^-] = 10^{-14+8,3}$  mol/L sont négligeables devant  $C_0$

## II- Aspects cinétiques de la synthèse de l'ammoniac

On considère la réaction de synthèse de l'ammoniac



pour laquelle, on étudie le mécanisme suivant :

- (1)  $A + N_2 \rightleftharpoons B$  équilibre établi à tout instant de constante  $K_1$
- (2)  $A + B \rightleftharpoons 2C$  étape de constante de vitesse  $k_2$  et  $k_{-2}$
- (3)  $2C + 3H_2 \rightleftharpoons 2A + 2NH_3$  équilibre de constante  $K_3$

2- La vitesse globale de la réaction (2) est donnée par :

$$v = v_2 - v_{-2} = k_2\theta_A\theta_B - k_{-2}\theta_C^2$$

où on a utilisé les taux de sites dans la loi de VAN'T HOFF à la place des concentrations.

3- La loi de GULDBERG et WAAGE appliqué à la réaction (1) s'écrit :

$$K_1 = \frac{\theta_B}{\theta_A \left( \frac{P_{N_2}}{P^\circ} \right)}$$

d'où on tire  $\theta_B = K_1\theta_A \left( \frac{P_{N_2}}{P^\circ} \right)$ .

Appliquée à l'équilibre (3), la loi donne :

$$K_3 = \frac{\theta_A^2 \left( \frac{P_{NH_3}}{P^\circ} \right)^2}{\theta_C^2 \left( \frac{P_{H_2}}{P^\circ} \right)^3}$$

$$\text{d'où on tire } \theta_C^2 = \frac{\theta_A^2 \left( \frac{P_{\text{NH}_3}}{P^\circ} \right)^2}{K_3 \left( \frac{P_{\text{H}_2}}{P^\circ} \right)^3}.$$

En reportant  $\theta_B$  et  $\theta_C^2$  dans l'expression de  $\nu$ , on obtient :

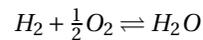
$$\nu = k_2 K_1 \theta_A^2 \left( \frac{P_{\text{N}_2}}{P^\circ} \right) - \frac{k_{-2} \theta_A^2 \left( \frac{P_{\text{NH}_3}}{P^\circ} \right)^2}{K_3 \left( \frac{P_{\text{H}_2}}{P^\circ} \right)^3}$$

La réaction n'a pas d'ordre.

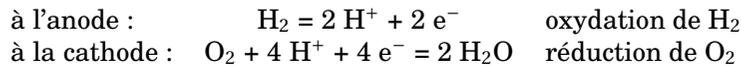
4- L'étape (3) fait intervenir plus de deux molécules dans les deux sens, elle ne correspond donc pas à des actes élémentaires.

### III- Dihydrogène et piles à combustible – Fonctionnement schématique d'une pile à combustible SOFC

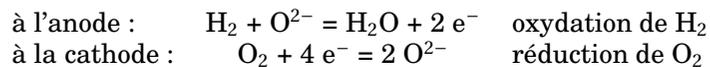
5- On étudie la réaction suivante réalisée dans la pile :



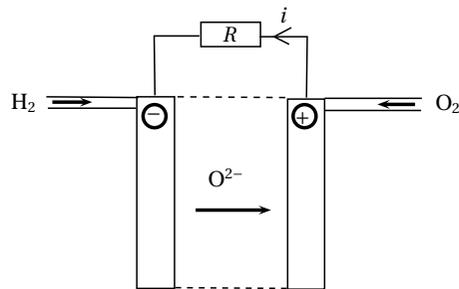
Les demi-équations électroniques correspondantes sont :



6- Les porteurs de charges sont  $\text{O}^{2-}$  à la place des ions  $\text{H}^+$  de l'eau. Les réactions sont alors :



7- Ci-dessous le schéma légendé de la pile :



8- Une telle pile est écologique (car elle produit  $\text{H}_2\text{O}$ ) mais il reste des problèmes pour la production et le stockage de  $\text{H}_2$ .

## Problème 2

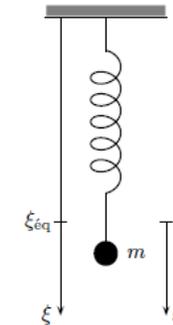
### Partie I - Oscillations sans frottement

#### I.A - Oscillations libres

I.A.1) On note  $\xi$  la longueur du ressort, et  $x$  la position de  $M$  par rapport à sa position d'équilibre. On a donc  $x = \xi - \xi_{\text{eq}}$ . Sur le point  $M$  s'exercent :

– le poids  $\vec{P} = mg\vec{e}_x$ ;

– la tension du ressort  $\vec{T} = -k(\xi - \ell_0)\vec{e}_x$ , où  $\ell_0$  est la longueur à vide du ressort.



I.A.2) L'équilibre du ressort s'écrit :

$$\vec{P} + \vec{T} = \vec{0}$$

soit, en projetant sur  $\vec{e}_x$ ,

$$mg - k(\xi_{\text{eq}} - \ell_0) = 0 \quad (1)$$

L'équation différentielle du mouvement s'obtient en écrivant la relation fondamentale de la dynamique appliquée à  $M$ , en projection sur  $\vec{e}_x$  :

$$m \frac{d^2 \xi}{dt^2} = mg - k(\xi - \ell_0) \quad (2)$$

En soustrayant l'équation (1) de l'équation (2), on obtient

$$m \frac{d^2 \xi}{dt^2} = -k(\xi - \ell_0) \quad (3)$$

On a  $x = \xi - \xi_{\text{eq}}$ , déplacement de  $M$  par rapport à la position d'équilibre. L'équation (3) s'écrit alors :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

Nous reconnaissons l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique de pulsation propre  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ . La solution satisfaisant aux conditions initiales données est

$$x(t) = x_0 \cos \omega_0 t \quad (4)$$

I.A.3) On peut utiliser les deux méthodes suivantes pour déterminer la raideur du ressort :

**Méthode statique :** On suspend plusieurs masses connues, et on mesure la longueur au repos du ressort. Selon l'équation (1), la loi  $\xi_{\text{éq}}(m)$  est affine, de pente  $g/k$ .

**Méthode dynamique :** On mesure la période des petites oscillations. Elle est donnée par  $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

I.A.4) Les deux forces s'exerçant sur la masse dérivent d'une énergie potentielle. On prend comme origine  $x = 0$ .

**Énergie potentielle de pesanteur :**  $E_{\text{pes}} = -mgx$ .

**Énergie potentielle élastique :** Attention, le choix de l'origine n'est pas le choix habituel<sup>1</sup>. Le plus sûr est de repartir de la définition du travail. La force est :

$$\vec{T} = -k(\xi - \ell_0)\vec{e}_x = -k(x + \xi_{\text{éq}} - \ell_0)\vec{e}_x$$

Par définition de l'énergie potentielle,

$$dE_{\text{él}} = -\delta W = -\vec{F} \cdot d\vec{M} = k(x + \xi_{\text{éq}} - \ell_0) dx$$

En choisissant  $E_{\text{él}} = 0$  pour  $x = 0$ , on a donc par intégration par rapport à  $x$

$$E_{\text{él}} = \frac{1}{2}k \left[ (x + \xi_{\text{éq}} - \ell_0)^2 - (\xi_{\text{éq}} - \ell_0)^2 \right] = \frac{1}{2}kx(x + 2\xi_{\text{éq}} - 2\ell_0)$$

D'après l'équation (1), on a  $\xi_{\text{éq}} - \ell_0 = mg/k$ , d'où

$$E_{\text{él}} = \frac{1}{2}k \left[ x^2 + 2x(\xi_{\text{éq}} - \ell_0) \right] = \frac{1}{2}k \left( x^2 + 2x \frac{mg}{k} \right)$$

soit finalement :

$$E_{\text{él}} = \frac{1}{2}kx^2 + mgx$$

1. La formule habituelle  $E_p = \frac{1}{2}k(\ell - \ell_0)^2$  suppose que l'on a pris le repos du ressort comme origine de l'énergie potentielle. Quand on étudie un oscillateur, il est plus simple de faire le choix de l'origine de l'énergie potentielle à la position d'équilibre de l'oscillateur.

I.A.5) L'énergie potentielle totale s'écrit  $E_p = E_{\text{pes}} + E_{\text{él}}$ , soit

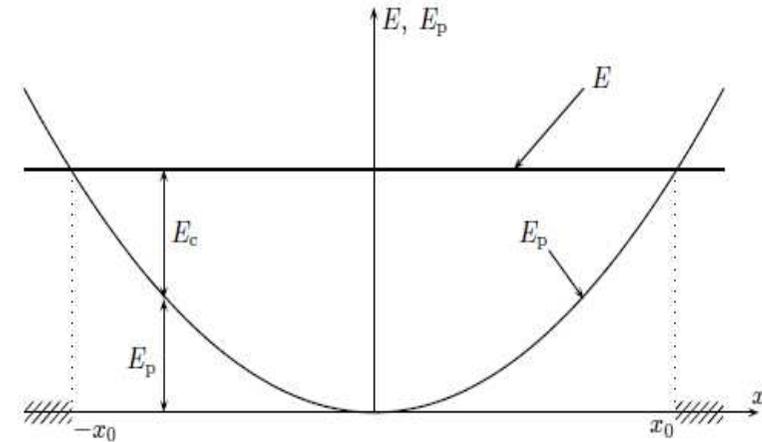
$$E_p = \frac{1}{2}kx^2 \quad (5)$$

La masse évolue dans un puits de potentiel parabolique, caractéristique d'un oscillateur harmonique.

L'énergie cinétique initiale étant nulle, l'énergie mécanique vaut initialement  $E = E_p(t=0) = \frac{1}{2}kx_0$ . Le système est conservatif (il n'est soumis qu'à des forces conservatives); son énergie est donc une constante du mouvement :

$$E = \frac{1}{2}kx_0^2 \quad (6)$$

I.A.6) L'énergie potentielle est donnée par (5), et l'énergie mécanique par (6). On lit l'énergie cinétique par soustraction :  $E_c = E - E_p$ . Comme on a nécessairement  $E_c \geq 0$ , les seules valeurs de  $x$  possibles sont celles qui vérifient  $E_p \leq E$ .



I.A.7) D'après (4) et (5), l'énergie potentielle s'écrit, en fonction du temps,

$$E_p(t) = \frac{1}{2} k x_0^2 \cos^2 \omega_0 t$$

Sa valeur moyenne est donc

$$\langle E_p \rangle = \frac{k x_0^2}{4} \quad (7)$$

La vitesse valant  $\dot{x} = -\omega_0 x_0 \sin \omega_0 t$ , l'énergie cinétique s'écrit

$$E_c = \frac{1}{2} m \omega_0^2 x_0^2 \sin^2 \omega_0 t$$

Sa valeur moyenne temporelle est donc

$$\langle E_c \rangle = \frac{1}{2} m \omega_0^2 x_0^2 = \frac{k x_0^2}{4} \quad (8)$$

Les relations (7) et (8) montrent qu'il y a, en moyenne, équipartition entre l'énergie cinétique et l'énergie potentielle :

$$\langle E_c \rangle = \langle E_p \rangle \quad (9)$$

## I.B - Oscillations forcées

Grâce à un système bielle-manivelle on impose à l'extrémité supérieure du ressort le déplacement  $X(t)\vec{e}_x = a \cos \omega t \vec{e}_x$ ,  $a$  et  $\omega$  étant des constantes.

I.B.1) La longueur du ressort vaut maintenant  $x + \xi_{\text{éq}} - X(t)$ ; la force exercée par le ressort sur  $M$  a donc pour expression

$$\vec{T} = -k(x + \xi_{\text{éq}} - X(t) - \ell_0)\vec{e}_x$$

En éliminant le poids à l'aide de (2), on établit, à l'aide de la relation fondamentale de la dynamique projetée selon  $\vec{e}_x$ ,

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + kx = F_{\text{sup}} \quad \text{avec} \quad F_{\text{sup}} = kX(t) \quad (10)$$

I.B.2) On s'intéresse au cas  $\omega \neq \omega_0$ .

a) L'équation (10) s'écrit

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 a \cos \omega t \quad (11)$$

La solution générale de l'équation homogène associée à (11) est de la forme

$$x_h(t) = \alpha \cos \omega_0 t + \beta \sin \omega_0 t \quad (12)$$

Pour trouver une solution particulière de (11) on peut passer par les complexes ou chercher une solution de la même nature que le second membre, c'est-à-dire de la forme d'une sinusoïde de même pulsation :  $x_p(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t$  et reporter  $x_p$  dans l'équation.

L'équation (11) s'écrit alors

$$A(\omega_0^2 - \omega) \cos \omega t + B(\omega_0 \omega) \sin \omega t = \omega_0^2 a \cos \omega t$$

Comme  $\omega_0 \neq \omega$ , on en déduit en identifiant les termes en sinus et en cosinus  $B = 0$  et

$A = \frac{a \omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega}$  Une solution particulière de (11) est donc

$$x_p(t) = \frac{a \omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega} \cos \omega t$$

La solution générale de (11) s'écrit donc

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) = \alpha \cos \omega_0 t + \beta \sin \omega_0 t + \frac{a \omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega} \cos \omega t \quad (13)$$

Les conditions initiales s'écrivent

$$x(0) = \alpha + \frac{a \omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega} = 0 \quad \text{d'où} \quad \alpha = -\frac{a \omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega}$$

et

$$\dot{x}(0) = \beta \omega_0 = 0 \quad \text{d'où} \quad \beta = 0$$

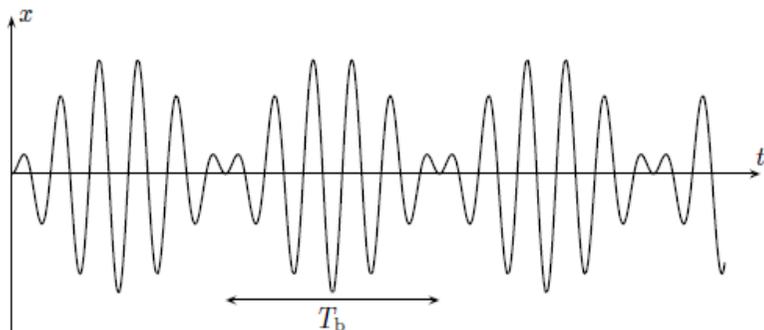
On a donc

$$x(t) = \frac{a \omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2} [\cos \omega t - \cos \omega_0 t] \quad (14)$$

que l'on peut écrire

$$x(t) = \frac{2a \omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2} \sin \omega_1 t \sin \omega_2 t \quad \text{avec} \quad \omega_1 = \frac{\omega + \omega_0}{2} \quad \text{et} \quad \omega_2 = \frac{\omega - \omega_0}{2} \quad (15)$$

b) Dans le cas où  $\omega = 1,2 \omega_0$ , on a  $\omega_2 = 0,1 \omega_0$  et  $\omega_1 = 1,1 \omega_0$ .



La période des battements est la longueur d'un fuseau, c'est-à-dire une demi-période de la sinusoïde de pulsation  $\omega_2$ . On a donc

$$\boxed{T_b = \frac{\pi}{\omega_2}} \quad (16)$$

c) L'énergie mécanique s'écrit

$$E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

On a donc

$$\frac{dE}{dt} = m\dot{x}\ddot{x} + kx\dot{x} = \dot{x}[m\ddot{x} + kx]$$

soit d'après (10),

$$\frac{dE}{dt} = \dot{x}F_{sup}$$

L'énergie mécanique ne se conserve pas.

Compte tenu de (14), on a

$$\frac{dE}{dt} = \frac{k a \omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos \omega t [-\omega \sin \omega t + \omega_0 \sin \omega_0 t]$$

Il apparaît donc que l'énergie mécanique ne varie pas de façon monotone.

En prenant la valeur moyenne, on a

$$\left\langle \frac{dE}{dt} \right\rangle = 0$$

L'énergie mécanique ne varie pas en moyenne.

I.B.3) On s'intéresse au cas  $\omega = \omega_0$ .

a) Dans le cas où  $\omega = \omega_0$ , la solution (14) se présente comme une forme indéterminée (0/0). Pour trouver la limite, on peut réécrire  $x(t)$  sous la forme :

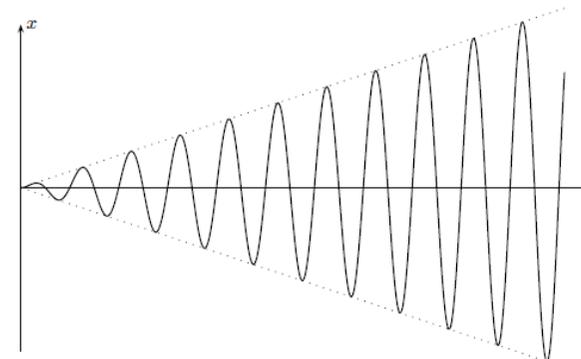
$$x(t) = \frac{a\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega} [\cos \omega t - \cos \omega_0 t] = \frac{a\omega_0^2}{\omega + \omega_0} \frac{-[\cos \omega t - \cos \omega_0 t]}{\omega - \omega_0}$$

On peut obtenir la limite pour  $\omega \rightarrow \omega_0$ , en utilisant la définition de la dérivée. On a alors :

$$\boxed{x(t) = \frac{a\omega_0}{2} t \sin \omega_0 t} \quad (17)$$

b) Le mouvement du point est une sinusoïde dont l'amplitude croît linéairement au cours du temps. Les deux demi-droites enveloppes de la courbe ont pour équation

$$x = \pm \frac{a\omega_0}{2} t$$



c) Nous nous trouvons en présence d'un phénomène de résonance.

Dans la réalité, l'acuité de la résonance est limitée par les phénomènes dissipatifs et les non linéarités du système. En effet, dès que l'amplitude s'accroît, le ressort cesse d'être linéaire (spires jointives si  $x$  est trop faible, perte d'élasticité si  $x$  est trop grand). La résonance est un phénomène que l'on rencontre dans tous les domaines de la physique. Quelques exemples :

**Acoustique** : L'effet LARSEN, où une fréquence audible est amplifiée par réaction entre un microphone et une enceinte.

**Electrocinétique** : Les oscillateurs mécanique permettent de générer des signaux sinusoïdaux, ou triangle, ou créneau à partir d'une tension continue (cf Spé)

**Optique** : Le laser, où une onde incidente à la fréquence de résonance  $\frac{E_2 - E_1}{h}$  induit l'émission d'un photon de même fréquence par des atomes excités au niveau  $E_2$  (émission stimulée); le photon induit augmente l'énergie de l'onde incidente.

d) L'énergie du système est

$$E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

soit compte tenu de (17),

$$E(t) = \frac{ma^2\omega_0^2}{8} [(\sin\omega_0 t + \omega_0 t \cos\omega_0 t) + \omega_0^2 t^2 \sin^2\omega_0 t]$$

soit

$$E(t) = \frac{ka^2}{8} [\sin^2\omega_0 t + \omega_0^2 t^2 + \omega_0 t \sin 2\omega_0 t] \quad (18)$$

Plaçons-nous à un instant  $t$  tel que  $\sin\omega_0 t = 1$ . On a alors  $\sin 2\omega_0 t = 0$ , d'où

$$E(t) = \frac{ka^2}{8} \omega_0^2 t^2 \quad (19)$$

Si  $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ , on a

$$E(t + T_0) = \frac{ka^2}{8} [\omega_0^2 t^2 + 4\pi^2 + 4\pi\omega_0 t] \quad (20)$$

D'après (19) et (20), la variation d'énergie sur l'intervalle  $[t; t + T_0]$  est

$$\Delta E = E(t + T_0) - E(t) = \frac{ka^2}{2} \pi(\pi + \omega_0 t)$$

La croissance d'énergie du système sur une durée  $T_0$  croît comme une fonction affine du temps.

## Partie II - Oscillations forcées avec amortissement fluide

II.A - La relation fondamentale de la dynamique s'écrit, en projection sur  $\vec{e}_x$ ,

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = mg - k(x + \xi_{\text{éq}} - X(t) - \ell_0) - h \frac{dx}{dt} \quad (21)$$

La condition d'équilibre (1) étant toujours valable (la force de frottement fluide est nulle au repos), l'équation (21) s'écrit, en posant  $Q = \frac{m\omega_0}{k}$ ,

$$\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 X(t) \quad (22)$$

II.B - Le temps caractéristique du régime transitoire est

$$\tau = \frac{Q}{\omega_0}$$

Au bout de quelques  $\tau$ , on peut considérer que le régime permanent, décrit par la solution en régime forcé, est atteint.

II.C - Recherchons la solution de (22) en régime permanent en utilisant les notations complexes.

Signal réel	Signal analytique	Amplitude complexe
$X(t) = a \cos \omega t$	$\underline{X}(t) = a e^{j\omega t}$	$\underline{X} = a$
$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$	$\underline{x}(t) = A e^{j(\omega t + \varphi)}$	$\underline{A} = A e^{j\varphi}$

L'équation (22) s'écrit, en utilisant les amplitudes complexes,

$$-\omega^2 \underline{A} + j\omega \frac{\omega_0}{Q} \underline{A} + \omega_0^2 \underline{A} = \omega_0^2 a \quad (23)$$

d'où l'on déduit l'expression de l'amplitude complexe de la réponse :

$$\underline{A} = \frac{\omega_0^2 a}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\omega \frac{\omega_0}{Q}} \quad (24)$$

Le module nous donne l'amplitude du déplacement de  $M$  :

$$\underline{A} = \frac{\omega_0^2 a}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \left(\omega \frac{\omega_0}{Q}\right)^2}} \quad (25)$$

II.D - Aux basses fréquences ( $\omega \ll \omega_0$ ), l'expression (25) devient  $A \approx a$ . Le déplacement de  $M$  est identique à celui de l'extrémité du ressort. Malgré son inertie, son temps de réponse est très rapide devant la fréquence de l'excitation, et la masse  $M$  répond quasi-instantanément.

Aux hautes fréquences ( $\omega \gg \omega_0$ ), l'expression (25) donne  $A \ll a$ . La masse  $M$  reste quasiment immobile. Son inertie l'empêche de répondre à l'excitation, trop rapide.

II.E - L'amplitude  $A$  du mouvement de  $M$  est maximale quand son dénominateur est minimale, ou encore quand le carré de son dénominateur est minimal. Il suffit donc de rechercher un minimum de

$$D(\omega) = (\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \left(\omega \frac{\omega_0}{Q}\right)^2$$

On a

$$\frac{dD}{d\omega} = 2 \left(-\frac{2\omega}{\omega_0^2}\right) \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right) + \frac{2\omega}{\omega_0^2 Q^2} = 2 \frac{\omega}{\omega_0^2} \left(\frac{1}{Q^2} - 2 + 2 \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)$$

On en déduit

$$\frac{dD}{d\omega} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \omega = 0 & \text{tangente horizontale à l'origine;} \\ \omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} & \text{si } Q \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

L'amplitude  $A$  prend une valeur maximale pour  $\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$  si  $Q$  est supérieur à

$$Q_{\min} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

II.F - La vitesse valant  $v(t) = \dot{x}(t)$ , son amplitude complexe est donnée par  $\underline{V} = j\omega \underline{A}$ , soit d'après (24)

$$\underline{V} = \frac{j\omega\omega_0^2 a}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\omega \frac{\omega_0}{Q}} \quad (26)$$

Le module de (26) donne l'amplitude de la vitesse :

$$V = \frac{\omega a}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2 Q^2}}}$$

que l'on met sous la forme

$$V = \frac{\omega_0 a}{\sqrt{\left(\frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + \frac{1}{Q^2}}} \quad (27)$$

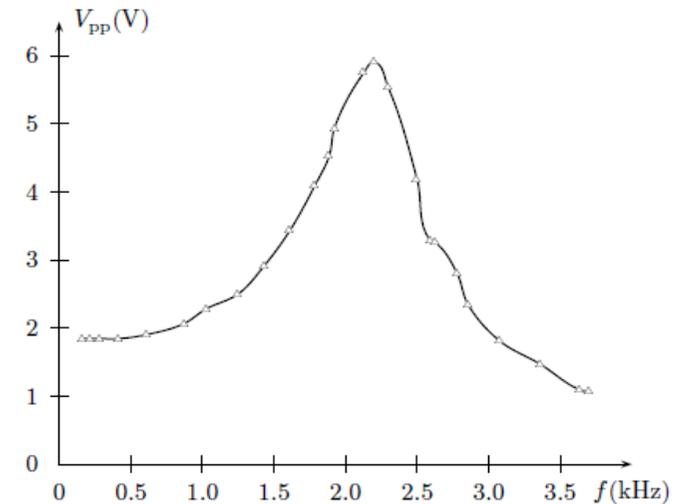
II.G - Aux basses fréquences, on a  $V \rightarrow 0$ . On a vu que  $M$  reproduisait alors le mouvement de l'excitation qui est très lent ; sa vitesse est donc très faible.

Aux hautes fréquences, on a  $V \rightarrow 0$ . On a vu que  $M$  restait alors quasi-immobile ; sa vitesse tend donc à s'annuler.

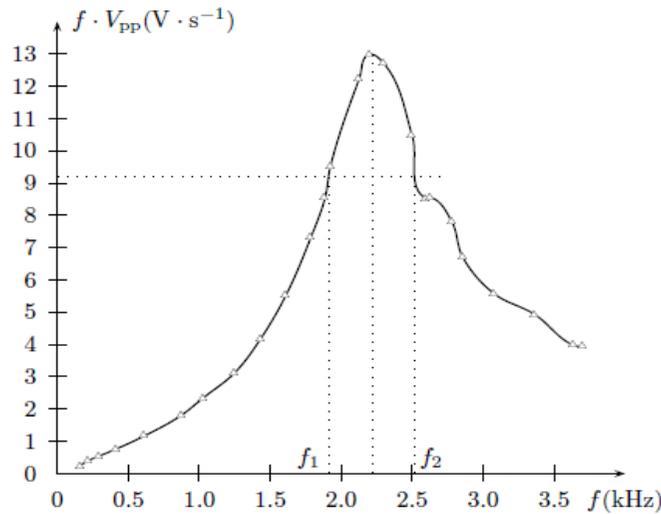
II.H - D'après l'expression (27), l'amplitude  $V$  est maximale quand son dénominateur est minimum, c'est à dire quand  $\frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0} = 0$ , soit  $\omega = \omega_0$ .

**L'amplitude  $V$  est maximale pour  $\omega = \omega_0$ , quelle que soit la valeur de  $Q$ .**

II.I - Traçons les graphes de  $V_{pp}(f)$  et de  $fV_{pp}(f)$ .



Pour la résonance de vitesse, on obtient la courbe suivante :



II.J - L'amplitude complexe de la vitesse est définie par  $\underline{V} = j\omega \underline{A} = j2\pi f \underline{A}$ . Les amplitudes sont reliées par  $V = 2\pi f A$ , soit :

$$V \propto f A$$

**La courbe  $f \cdot V_{pp}$  permet d'accéder à la vitesse.**

II.K - On a vu que  $V_{\max} = V(f_0)$ , avec  $\omega_0 = 2\pi f_0$ . Les deux fréquences  $f_1$  et  $f_2 > f_1$  telles que  $V(f_1) = V(f_2) = \frac{V_{\max}}{\sqrt{2}}$  définissent la bande passante  $\Delta f = f_2 - f_1$ .

La détermination de  $f_0$ ,  $f_1$  et  $f_2$  est indiquée sur le graphe. On obtient  $f_0 = 2,220$  Hz,  $f_1 = 1,910$  Hz et  $f_2 = 2,515$  Hz, d'où  $f$

$$\Delta f = 0,605 \text{ Hz}$$

Le facteur de qualité est donné par  $Q = \frac{f_0}{\Delta f}$  d'où

$$Q = 3,669$$

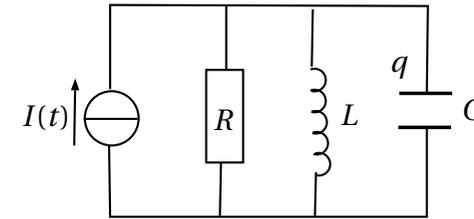
La valeur ainsi trouvée du facteur de qualité diffère d'environ 15% de la valeur obtenue par un logiciel de modélisation. Le modèle proposé donne un résultat acceptable, vu sa simplicité (ressort linéaire, masse linéique du ressort négligé, frottement fluide).

Le coefficient de frottement est donné par  $h = \frac{m\omega_0}{Q} = \frac{2\pi m f_0}{Q}$  soit, avec la valeur déterminée graphiquement,

$$h = 1,045 \text{ kg.s}^{-1}$$

Les valeurs obtenues par simulation conduisent à  $h = 1,209 \text{ kg.s}^{-1}$

II.L - Le schéma électrique équivalent est



La charge  $q$  vérifie l'équation différentielle

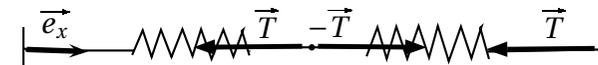
$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{1}{RC} \frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC} q = \frac{dI}{dt}$$

qui est de la même forme que (10).

mécanique	électricité
déplacement $x(t)$	charge $q(t)$
vitesse $v$	intensité $i$
force $F$	tension $u$
masse $m$	inductance $L$
coefficient de frottement $h$	résistance $R$
raideur $k$	inverse de la capacité $1/C$

### Partie III - Phénomènes de propagation

III.A - On met bout à bout deux ressorts ( $k_1 ; \ell_{01}$ ) et ( $k_2 ; \ell_{02}$ ) à l'équilibre.



En considérant chaque ressort, on a

$$\vec{T} = -k_1(\ell_1 - \ell_{01})\vec{e}_x \tag{28}$$

$$\vec{T} = -k_2(\ell_2 - \ell_{02})\vec{e}_x \tag{29}$$

Écrivons que l'ensemble se comporte comme un ressort de longueur à vide  $\ell_0 = \ell_{01} + \ell_{02}$ , de longueur  $\ell = \ell_1 + \ell_2$  et de raideur  $k$  :

$$\vec{T} = -k(\ell_1 + \ell_2 - \ell_{01} - \ell_{02})\vec{e}_x \quad (30)$$

Les équations (28) et (29) permettent d'écrire

$$\frac{1}{k_1}\vec{T} = (\ell_1 - \ell_{01})\vec{e}_x \quad \text{et} \quad \frac{1}{k_2}\vec{T} = (\ell_2 - \ell_{02})\vec{e}_x \quad (31)$$

On en déduit d'après (30)

$$\frac{1}{k}\vec{T} = [(\ell_1 - \ell_{01}) + (\ell_2 - \ell_{02})]\vec{e}_x = \frac{1}{k_1}\vec{T} + \frac{1}{k_2}\vec{T}$$

L'ensemble des deux ressorts se comporte donc comme un ressort de raideur

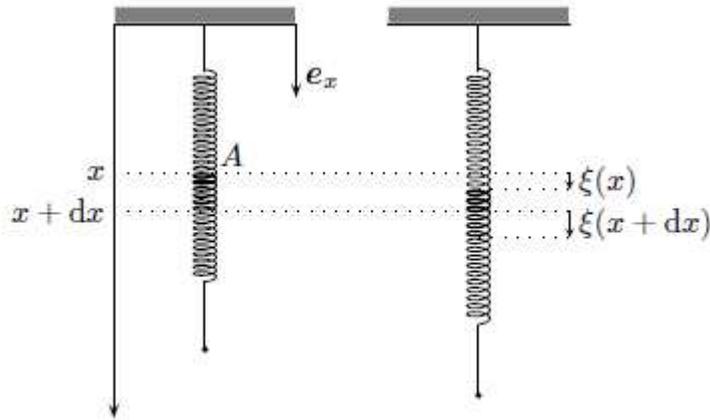
$$\boxed{\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}} \quad (32)$$

Le ressort de longueur  $L$  et de raideur  $k$  peut se décomposer en  $\frac{L}{\Delta x}$  tranches de longueur  $\Delta x$  et de raideur  $K$ . D'après (32), on a

$$\frac{1}{k} = \frac{L/\Delta x}{K}$$

d'où l'expression de la raideur d'une tranche de longueur  $\Delta x$  :

$$\boxed{K = \frac{L}{\Delta x} k} \quad (33)$$



III.B - On néglige le poids du ressort : sa longueur au repos est sa longueur à vide  $L$ . Considérons l'élément de longueur  $dx$  au repos, situé en  $x$ . D'après la question précédente, sa raideur est

$$K_{dx} = \frac{L}{dx} k$$

Lorsque le ressort est tendu, le point  $A$  d'abscisse  $x$  se déplace de  $\xi(x)$ . L'extrémité du segment étudié se déplace de  $\xi(x+dx)$ . La longueur du segment devient alors

$$(dx)' = dx + \xi(x+dx) - \xi(x) = dx + \frac{\partial \xi}{\partial x} dx$$

Le segment exerce en  $A$ , sur le tronçon  $[0; x]$  la force

$$\vec{F} = K_{dx} [(dx)' - dx] \vec{e}_x = \frac{L}{dx} k \frac{\partial \xi}{\partial x} dx \vec{e}_x$$

La composante sur  $\vec{e}_x$  de la force exercée par le tronçon  $[x; L]$  sur le tronçon  $[0; x]$  a donc pour expression

$$\boxed{F = kL \frac{\partial \xi}{\partial x}(x)} \quad (34)$$

III.C - La tranche  $[x; x+dx]$  a une masse  $\Delta m = \mu \Delta x$ . La relation fondamentale de la dynamique projetée sur  $\vec{e}_x$  s'écrit

$$\mu \Delta x \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = F(x+\Delta x) - F(x) = \frac{\partial F}{\partial x} dx = kL \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \quad (35)$$

soit

$$\boxed{\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = 0} \quad \text{avec} \quad c = \sqrt{\frac{kL}{\mu}} \quad (36)$$

La grandeur  $c$  a la dimension d'une vitesse.

III.D - L'équilibre de la masse  $M$  s'écrit

$$0 = mg - F(L + \xi_{\text{eq}}(L)) = mg - kL \frac{\partial \xi_{\text{eq}}}{\partial x}(L) \quad (37)$$

Quand le point  $M$  est en mouvement, la relation fondamentale de la dynamique projetée sur  $\vec{e}_x$  s'écrit :

$$m \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t^2} = mg - h \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} - kL \frac{\partial \xi}{\partial x}(L) \quad (38)$$

En soustrayant (37) de (38), on obtient

$$m \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t^2} = -h \frac{\partial \varepsilon}{\partial t}(L) - kL \frac{\partial \varepsilon}{\partial x}(L) \quad (39)$$

III.E - Dans le cas où la masse  $M$  est accrochée et qu'on est à l'équilibre, l'équation (36) devient  $\frac{\partial^2 \xi_{\text{éq}}}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \xi_{\text{éq}}}{\partial t^2} = 0$ . En soustrayant cette relation à l'équation (36), on peut écrire :

$$\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t^2} = 0 \quad (40)$$

On recherche des solutions de (40) de la forme  $\varepsilon(x, t) = f(x) \cos \omega t$ . En notation complexe,  $\underline{\varepsilon}(x, t) = \underline{A}(x) e^{j\omega t}$ . L'équation (40) donne alors :

$$\frac{d^2 \underline{A}}{dx^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \underline{A}(x) = 0$$

On reconnaît l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique qui admet pour solution générale

$$\underline{A}(x) = \underline{\alpha} \cos \frac{\omega x}{c} + \underline{\beta} \sin \frac{\omega x}{c} \quad (41)$$

III.F - Nous allons utiliser comme conditions aux limites les déplacements des deux extrémités du ressort.

**Extrémité supérieure** (condition en  $x = 0$ ) : Le déplacement de l'extrémité est imposé par l'excitation :

$$\varepsilon(0, t) = a \cos \omega t$$

En notation complexe,  $\underline{\varepsilon}(0, t) = a e^{j\omega t} = \underline{A}(0) e^{j\omega t}$ . D'après (41), on a  $\underline{A}(0) = \underline{\alpha}$ , d'où

$$\boxed{\underline{\alpha} = a} \quad (42)$$

**Extrémité inférieure** (condition en  $x = L$ ) : La masse  $M$  est suspendue à cette extrémité ; on lui applique la relation fondamentale de la dynamique, en projection sur  $\vec{e}_x$ .

On reprend pour cela l'équation obtenue au III-D

$$m \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t^2} = -kL \frac{\partial \varepsilon}{\partial x}(L) - h \frac{\partial \varepsilon}{\partial t}(L) \quad (43)$$

Écrivons (43) en utilisant la notation complexe  $\underline{\varepsilon}(x, t) = \underline{A}(x) e^{j\omega t}$  :

$$-m\omega^2 \underline{A}(L) = -kL \frac{d\underline{A}}{dx}(L) - jh\omega \underline{A}(L) \quad (44)$$

D'après (41) et (44), on a donc, en posant  $\Phi = \frac{\omega L}{c}$ ,

$$\begin{aligned} -m\omega^2 a \cos \Phi - m\omega^2 \underline{\beta} \sin \Phi &= kL \frac{\omega}{c} a \sin \Phi - kL \frac{\omega}{c} \underline{\beta} \cos \Phi \\ &\quad - jh\omega a \cos \Phi - jh\omega \underline{\beta} \sin \Phi \end{aligned}$$

soit

$$\underline{\beta} = a \frac{m\omega^2 \cos \Phi + k\Phi \sin \Phi - jh\omega \cos \Phi}{-m\omega^2 \sin \Phi + k\Phi \cos \Phi + jh\omega \sin \Phi}$$

d'où, comme  $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$

$$\boxed{\underline{\beta} = a \frac{\omega^2 \cos \Phi + \omega_0^2 \Phi \sin \Phi - j \frac{\omega_0 \omega}{Q} \cos \Phi}{-\omega^2 \sin \Phi + \omega_0^2 \Phi \cos \Phi + j \frac{\omega_0 \omega}{Q} \sin \Phi}} \quad (45)$$

III.G - Écrivons  $\underline{A}(L)$  en utilisant (41), (42) et (45) :

$$\begin{aligned} \underline{A}(L) &= a \left[ \cos \Phi + \frac{\omega^2 \cos \Phi + \omega_0^2 \Phi \sin \Phi - j \frac{\omega_0 \omega}{Q} \cos \Phi}{-\omega^2 \sin \Phi + \omega_0^2 \Phi \cos \Phi + j \frac{\omega_0 \omega}{Q} \sin \Phi} \sin \Phi \right] \\ &= a \frac{\omega_0^2 \Phi}{-\omega^2 \sin \Phi + \omega_0^2 \Phi \cos \Phi + j \frac{\omega_0 \omega}{Q} \sin \Phi} \end{aligned}$$

On a donc

$$\boxed{\underline{A}(L) = \frac{a}{\cos \Phi - \frac{\omega^2 \sin \Phi}{\omega_0^2 \Phi} + j \frac{\omega \sin \Phi}{\omega_0 Q \Phi}}} \quad (46)$$

Dans la partie II.C, on a négligé la masse volumique  $\mu$  du ressort. Si on prend  $\mu = 0$  dans (35), on obtient

$$F(x + \Delta x) - F(x) = 0 = \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$$

donc  $\frac{\partial \xi}{\partial x} = \text{cste}$ , relation valable aussi à l'équilibre, soit

$$\frac{\partial \xi}{\partial x}(L) = \frac{\partial \xi}{\partial x}(0) \quad \text{et} \quad \frac{\partial \xi_{\text{éq}}}{\partial x}(L) = \frac{\partial \xi_{\text{éq}}}{\partial x}(0)$$

On a donc par soustraction

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial x}(L) = \frac{\partial \varepsilon}{\partial x}(0)$$

Comme  $\underline{\varepsilon}(x, t) = \underline{A}(x)e^{j\omega t}$ , et d'après (41), la relation (47) s'écrit

$$-a \sin \Phi + \underline{\beta} \cos \Phi = \underline{\beta}$$

ce qui entraîne  $\Phi = 0$ .

**Négliger la masse linéique du ressort (limite  $\mu \rightarrow 0$ ) revient à passer à la limite  $\Phi \rightarrow 0$ .**

D'après (46), on a

$$\lim_{\Phi \rightarrow 0} \underline{A}(L) = \frac{a}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j \frac{\omega}{\omega_0 Q}}$$

On retrouve bien le résultat du II.C.

Pour  $Q \gg 1$ , l'amplitude complexe du mouvement de  $M$  devient

$$\underline{A} \simeq \frac{a}{\cos \Phi - \frac{\omega^2 \sin \Phi}{\omega_0^2 \Phi}}$$

Elle est maximale (résonance) pour  $\cos \Phi = \frac{\omega^2 \sin \Phi}{\omega_0^2 \Phi}$ , soit

$$\boxed{\frac{\omega L}{c} \tan \frac{\omega L}{c} = \frac{\omega_0^2 L^2}{c^2}}$$

La résolution de cette équation donne les fréquences de résonance  $\omega_r$ .