

Problème 1

On sait aujourd'hui que les étoiles naissent par accréation de matière au cœur de nébuleuses, nuages de gaz et de poussières dans le vide interstellaire. Dans toute cette partie nous modéliserons une nébuleuse primitive par une boule de gaz, dont les constituants sont uniquement en interaction gravitationnelle. Ce système est isolé thermiquement et mécaniquement et constitue ce que l'on appelle un système auto-gravitant.

A. Répartition de masse dans un système auto-gravitant

On repère un point M de l'espace par ses coordonnées sphériques (r, θ, φ) . L'origine du repère est placée au centre de la boule de gaz, et on introduit la base locale $(M : \vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$.

Dans un premier temps, on considère le gaz comme un milieu continu, à symétrie sphérique, pour lequel on peut introduire la masse volumique $\rho(r)$ et la pression $P(r, \theta, \varphi)$. On note $\vec{\mathcal{G}}(r, \theta, \varphi)$ le champ de gravitation créé par le système en tout point de l'espace.

1. Justifier que $\vec{\mathcal{G}} = \mathcal{G}(r)\vec{e}_r$ et que la pression ne dépend que de r .
2. En utilisant une analogie entre la structure du champ gravitationnel et celle du champ électrique $\vec{E}$, justifier que l'on a : $\oint_{\Sigma} \vec{\mathcal{G}} \cdot d\vec{S} = KM$ où $M = \iiint_V \rho d\tau$.
 Quel est le lien entre le volume V et la surface Σ ? Que représente alors M ? Déterminer K .

3. On considère que le gaz est à l'équilibre hydrodynamique et que l'on peut donc utiliser l'équation de la statique des fluides. D'autre part, le gaz est supposé incompressible, c'est-à-dire que $\rho = \rho_0$ est constante dans la boule de rayon R et nulle au-delà.

Déterminer la loi de pression $P(r)$ pour $r < R$. En déduire P_c la pression au centre de la boule.

Application Numérique : calculer P_c pour Jupiter $M = 1,9 \times 10^{27}$ kg et $R = 7,1 \times 10^7$ m

Nous recherchons à présent un profil $\rho(r)$ pouvant décrire un gaz compressible et demeurant compatible avec une situation statique. Pour cela, il est nécessaire de trouver une relation entre ρ et P caractéristique du gaz.

4. Montrer que lors d'une transformation infinitésimale adiabatique réversible d'une masse δm de gaz parfait, on peut écrire $\frac{P(r)}{\rho(r)^\gamma} = A$, où $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$ avec c_v et c_p les capacités calorifiques massiques à volume et pression constants, et A une constante qu'on ne cherchera pas à déterminer. En déduire $\frac{dP}{dr}$.

Nous considérerons dans la suite que cette relation est vérifiée pour le système auto-gravitant en prenant $\gamma = 2$.

5. Montrer que $\frac{d}{dr} \left(\frac{r^2}{\rho} \frac{dP}{dr} \right) = K\rho r^2$, et en déduire l'équation différentielle vérifiée par ρ .

6. En utilisant le changement de fonction $f(r) = r\rho(r)$ et en remarquant que $r \frac{d^2\rho}{dr^2} + 2 \frac{d\rho}{dr} = \frac{d^2}{dr^2}(\rho r)$, montrer que f est solution d'une équation différentielle homogène à coefficients constants. En déduire la forme des solutions pour ρ (on ne cherchera pas ici à déterminer les constantes d'intégration). Sur quel intervalle de r cette solution est-elle raisonnable? Tracer l'allure de ρ sur cet intervalle.

B. Catastrophe gravothermale

Nous considérons à présent le gaz comme un ensemble de N particules de masse m_i , isolé et à l'équilibre thermique. On repère les particules par leur position $\vec{r}_i$, elles sont animées d'une vitesse $\vec{v}_i$ dans le référentiel barycentrique, ici galiléen. Chaque particule i est soumise à la résultante des forces gravitationnelles dues aux autres particules, notée $\vec{F}_i$.

7. Justifier que le référentiel barycentrique est galiléen et appliquer le Principe Fondamental de la Dynamique à une particule i .
8. Donner l'expression de l'énergie cinétique en fonction des vitesses $\vec{v}_i$ dans ce même référentiel. Montrer qu'elle peut se mettre sous la forme :

$$E_c = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \frac{d}{dt} (m_i \vec{v}_i \cdot \vec{r}_i) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (\vec{F}_i \cdot \vec{r}_i)$$

9. Montrer que $\left\langle \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \frac{d}{dt} (m_i \vec{v}_i \cdot \vec{r}_i) \right\rangle = 0$ où la notation $\langle \rangle$ désigne la valeur moyenne temporelle. On rappelle que pour une fonction f ,

$$\langle f \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt \right).$$

En déduire l'expression de $\langle E_c \rangle$ en fonction de $\vec{r}_i$ et $\vec{F}_i$.

10. Écrire la force $\vec{F}_{j \rightarrow i}$ qu'exerce la particule j sur la particule i en fonction de m_i , m_j , $\vec{r}_i$, $\vec{r}_j$ et $|\vec{r}_j - \vec{r}_i|$. Exprimer l'énergie potentielle totale du système E_p en fonction des variables précédentes.

Démontrer que : $\langle E_c \rangle = -\frac{1}{2} \langle E_p \rangle$

11. Dans le cadre de la théorie cinétique des gaz, on montre que $\langle E_c \rangle = \frac{3}{2} N k_B T$. Déterminer C_v la capacité calorifique à volume constant du système. On suppose ce système en contact avec un thermostat à une température T_0 différente de sa température initiale. Ce système peut-il se thermaliser à T_0 ? Conclure sur sa stabilité thermique.

On observe que le système isolé se scinde en deux phases : un cœur dont le comportement reste décrit par le modèle précédent et un halo peu dense modélisable par un gaz parfait. Ces deux phases restent en contact thermique par leur surface. On note C_c et C_h les capacités calorifiques à volume constant respectivement du cœur et du halo, U_c et U_h leurs énergies internes.

12. Connaissez-vous un autre modèle de gaz menant dans certaines conditions à une instabilité du système et à l'apparition de deux phases distinctes ?

13. En partant d'une situation d'équilibre thermique, c'est-à-dire qu'à l'instant initial la température du cœur est la même que celle du halo, on considère une fluctuation $\delta U_c > 0$ de l'énergie interne du cœur. Déterminer le signe de $\delta(T_h - T_c)$ en distinguant les cas $|C_c| > C_h$ et $|C_c| < C_h$. Laquelle de ces deux situations peut être qualifiée de catastrophe gravothermale ?

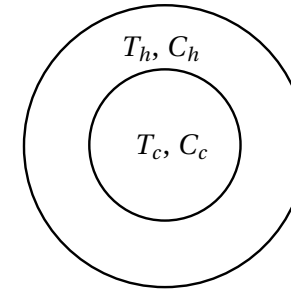


Figure 1 : Séparation de la nébuleuse en un cœur et un halo.