

NB : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées.

Toute application numérique ne comportant pas d'unité ne donnera pas lieu à attribution de points.

Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Problème 1

La fermentation alcoolique des jus sucrés sous l'action de micro-organismes tels que les levures et les bactéries est une source d'alcools. L'éthanol est fabriqué industriellement par fermentation sous l'action du complexe enzymatique zymase présent dans la levure de bière, de mono et disaccharides comme le glucose, ou de jus sucrés naturels comme le sucre de canne et les mélasses des sucreries. Dans le cas du glucose, l'équation-bilan de la réaction est la suivante :



Des produits secondaires sont formés dont les plus importants sont le glycérol, l'acide succinique, l'acide acétique et l'acide amylique. L'intérêt de cette méthode par rapport à la production classique d'éthanol par hydratation de l'éthylène est qu'on utilise de la biomasse au lieu d'utiliser du pétrole et que la dépense énergétique est moindre.

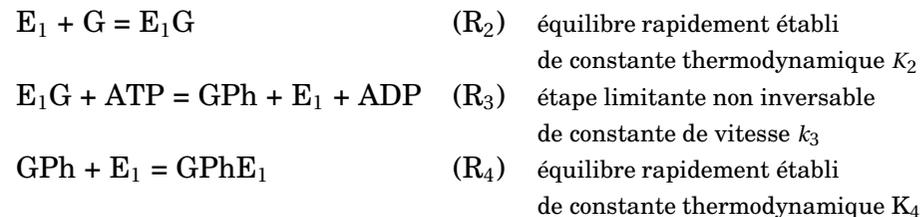
Les études cinétiques sont effectuées à T et V constants. Pour transformer le glucose en éthanol, les enzymes sont indispensables. Les réactions engendrées sont complexes et multiples. Nous nous intéresserons ici à la première étape de la fermentation alcoolique, c'est-à-dire à la réaction (R_1) suivante qui fait intervenir un enzyme E_1 :



où les abréviations représentent les composés suivants :

G : glucose ; ATP : adénosine triphosphate ; ADP : adénosine diphosphate ; GPh : glucose phosphate ; E_1 : hexokinase.

Cette réaction (R_1) peut être décomposée en trois étapes élémentaires :



La réaction (R_4) traduit l'inhibition de l'enzyme E_1 par le produit de la réaction (R_3) c'est à dire GPh. Les activités seront assimilées aux concentrations.

1- On note $[E_1]_0$ la concentration initiale de l'enzyme E_1 . Grâce à un bilan de matière sur l'enzyme E_1 , établir l'expression de $[E_1]_0$ en fonction des concentrations $[E_1G]$, $[G]$, $[GPh]$ et des constantes d'équilibre K_2 et K_4 des réactions (R_2) et (R_4) respectivement .

2- Donner l'expression de la vitesse de formation du produit GPh, v_1 en fonction de k_3 , K_2 , K_4 et des concentrations $[GPh]$, $[G]$, $[ATP]$ et $[E_1]_0$.

Lors d'une campagne expérimentale, on a pu mesurer la vitesse initiale $v_{1,0}$ dans les conditions suivantes : $[E_1]_0 = 1.10^{-6} \text{ mol.L}^{-1}$; $[ATP]_0 = 5.10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$; $[ADP]_0 = 0 \text{ mol.L}^{-1}$. Les concentrations initiales et les résultats obtenus sont consignés dans le tableau suivant :

$[G]_0$ ($10^{-5} \text{ mol.L}^{-1}$)	5	10	20	50	50	50
$[GPh]_0$ ($10^{-5} \text{ mol.L}^{-1}$)	1	1	1	1	5	8
$v_{1,0}$ ($10^{-5} \text{ mol.L}^{-1}.\text{min}^{-1}$)	3,385	5,388	7,652	10,233	8,000	6,875

3- En exploitant les résultats des quatre premières expériences du tableau, montrer que les grandeurs $\frac{1}{v_{1,0}}$ et $\frac{1}{[G]_0}$ sont liées par une relation affine du type $\frac{1}{v_{1,0}} = b_1 + a_1 \frac{1}{[G]_0}$ et déterminer les valeurs des constantes a_1 et b_1 en précisant leurs unités respectives.

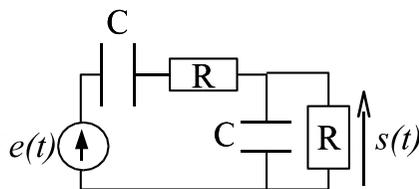
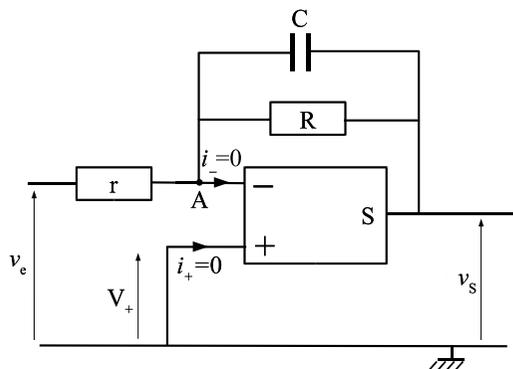
4- Utiliser la constante b_1 pour en déduire la constante de vitesse k_3 en précisant son unité.

5- En exploitant les résultats des trois dernières expériences du tableau, montrer que les grandeurs $\frac{1}{v_{1,0}}$ et $[GPh]_0$ sont liées par une relation affine du type $\frac{1}{v_{1,0}} = b_2 + a_2 [GPh]_0$ et déterminer les valeurs des constantes a_2 et b_2 en précisant leurs unités respectives.

6- En déduire les valeurs des deux constantes d'équilibre K_2 et K_4 .

Problème 2

1 - Indiquer à l'aide d'une étude rapide la nature des deux filtres suivants (l'amplificateur opérationnel AO est supposé idéal et fonctionne en régime linéaire) :



2 - Calculer la fonction de transfert du filtre avec l'AO.

3 - Faire l'étude de la fonction de transfert du filtre avec l'AO et tracer son diagramme de Bode. Est-ce en accord avec le résultat obtenu précédemment ?

4 - On considère maintenant le filtre sans AO de la question 1 - précédente appelé *pont de WIEN*. Par un calcul sur les grandeurs temporelles, montrer que l'équation différentielle liant les tensions $e(t)$ et $s(t)$ s'écrit :

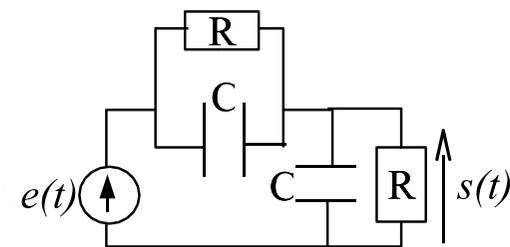
$$\frac{d^2 s}{dt^2} + 3\omega_0 \frac{ds}{dt} + \omega_0^2 s = \omega_0 \frac{de}{dt}$$

où ω_0 s'exprime simplement en fonction de R et C .

5 - Par un calcul à partir des impédances, expliciter la fonction de transfert du pont de WIEN. Tracer son diagramme de BODE.

6 - Montrer comment on peut retrouver l'équation différentielle de la question 1 - à partir de la fonction de transfert.

On considère maintenant le montage ci-dessous :



7 - Montrer que l'équation différentielle liant les tensions $e(t)$ et $s(t)$ s'écrit :

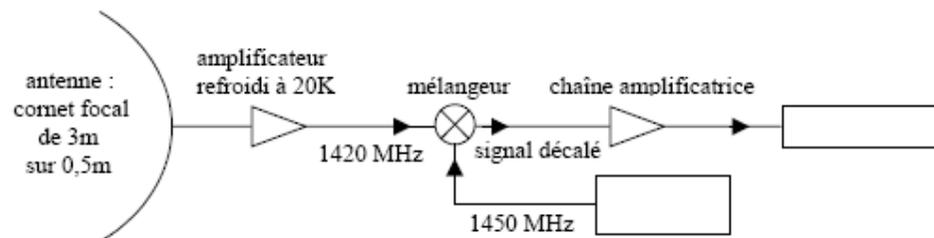
$$2 \left(\frac{ds}{dt} + \omega_1 s \right) = \frac{de}{dt} + \omega_1 e$$

où ω_1 s'exprime simplement en fonction de R et C .

8 - Donner la fonction de transfert de ce filtre. Conclure quant à la possibilité de lier équation différentielle et fonction de transfert.

Problème 3

Inauguré en 1965, le radiotélescope de Nançay a été créé pour étudier le décalage Doppler de la raie 21cm de l'atome d'hydrogène due au couplage spin nucléaire- spin électronique. C'est un moyen privilégié d'étude de la cinématique de l'hydrogène interstellaire, et donc des mouvements dans l'univers. De 1956 à 1967, de nombreux chercheurs ont travaillé à la très délicate mise au poi



On se propose de reproduire simplement le principe d'un mélangeur en TP en se plaçant 6 décades plus bas en fréquence.

1 - Dédoublément de fréquence

Aucune connaissance préalable du AD633 n'est nécessaire.

On a deux tensions :

$$a(t) = A\sqrt{2}\cos(2\pi f_a t) \text{ avec } f_a = 1420 \text{ Hz}$$

$$e_0(t) = E_0\sqrt{2}\cos(2\pi f_0 + \varphi_0) \text{ avec } f_0 = 1450 \text{ Hz}$$

misés aux entrées d'un multiplieur AD633 ; on obtient en sortie une tension :

$$m(t) = a(t).e_0(t)$$

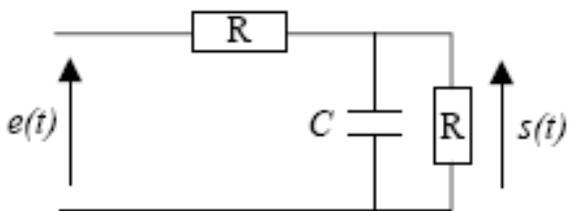
Démontrer que $m(t)$ est la superposition de deux signaux sinusoïdaux de fréquence f et $f' > f$:

$$m(t) = M[\cos(2\pi f t + \varphi_0) + \cos(2\pi f' t + \varphi_0)].$$

Calculer numériquement f et f' .

2 - Filtrage

On utilise le filtre suivant :

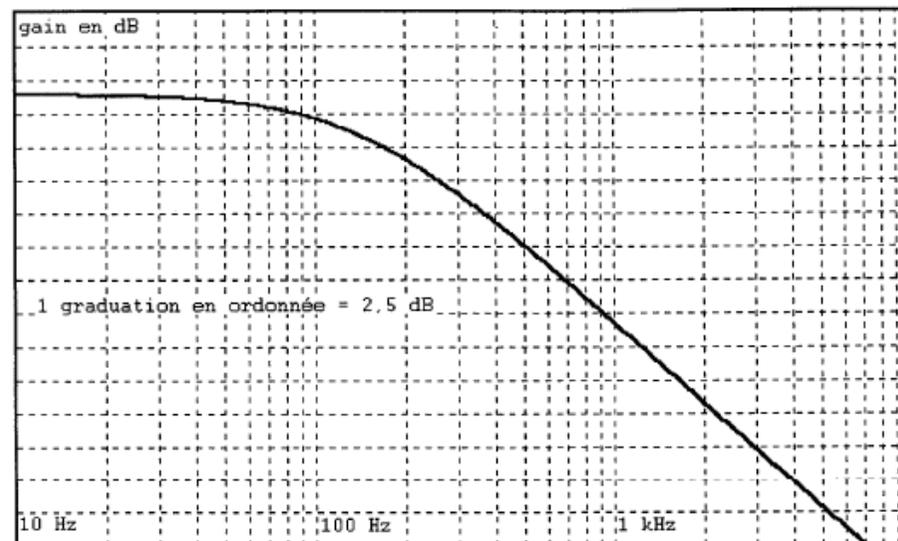


2-a En effectuant un schéma équivalent en BF (basse fréquence), puis un autre en HF (haute fréquence), déterminer sans calcul le type de ce filtre.

2-b Déterminer la fonction de transfert $\underline{H}(x)$ de ce filtre en fonction de $x = \omega RC$.

2-c Déterminer sa pulsation de coupure ω_c en fonction de R et C .

2-d On a tracé ci-dessous le diagramme de Bode en gain de ce filtre.



Déterminer un ordre de grandeur du produit RC .

2-e En haute fréquence, pourquoi parle-t-on d'une intégration ?

Comment vérifie-t-on cette propriété sur le diagramme de Bode en gain ?

Vers quelle valeur tend alors le déphasage de $s(t)$ par rapport à $e(t)$?

3 - Le mélangeur

On place à l'entrée de ce filtre le signal $m(t)$. La sortie est alors :

$$s(t) = S\cos(2\pi f t + \varphi_S) + S'\cos(2\pi f' t + \varphi_{S'}).$$

3-a Déterminer la valeur numérique de S'/S à partir du diagramme de Bode.

3-b Sachant que l'atténuation de la véritable chaîne de réception est bien supérieure, en déduire la valeur de la fréquence du signal décalé de la chaîne originale.

Problème 4

On considère les deux dispositifs suivants :

1. Un système mécanique constitué d'un corps de masse m , accroché à un ressort de raideur k et de longueur à vide ℓ_0 , soumis à une force de frottement fluide de coefficient h et subissant une force excitatrice de composante verticale F . On note z la position de la masse m , l'origine étant choisie à la position d'équilibre lorsque $F = 0$.

2. Un système électrique constitué d'un circuit RLC série soumis à une tension $e(t)$.

A - Etablir les équations différentielles vérifiées par la charge q du condensateur et par la cote z de la masse m . Déterminer les grandeurs électriques analogues à la cote z , à la force F , à la masse m , à la constante de frottement h , à la constante de raideur k du ressort et à la vitesse v de la masse.

B - On suppose que $e(t)$ et $F(t)$ sont constantes pour $t < 0$ et s'annulent pour $t > 0$. On observe pour chaque système un régime transitoire pseudo-périodique amorti. Pour les deux systèmes, on mesure un décrétement logarithmique identique : $\delta = 0,75$, la pseudo période est $T = 1,4$ ms pour le circuit

RLC et $T = 1,4$ s pour le système mécanique. Sachant que $m = 0,1$ kg et $L = 0,01$ H, en déduire les valeurs de R , C , k et h . Calculer le facteur de qualité Q de ces deux systèmes.

C - On suppose que $e(t)$ et $F(t)$ sont sinusoïdales. Décrire le phénomène de résonance d'intensité dans le cas du circuit RLC . Quelle est l'analogie dans le circuit mécanique ? Avec les valeurs numériques obtenues précédemment peut-il y avoir résonance d'élongation dans le circuit mécanique ? A quoi correspond ce phénomène dans le circuit électrique ?

D - On peut définir une impédance mécanique sur le modèle de l'impédance électrique. Donner l'expression de l'impédance mécanique du système mécanique.

Commentaires et correction :

Problème 1

Il faut absolument revoir la notion de relation de conservation de la matière. Vous avez l'habitude de raisonner avec les tableaux d'avancement, ce n'est pas ce qui est demandé ici. Ainsi pour l'enzyme, on attendait la relation :

$$[\mathbf{E}_1]_0 = [\mathbf{E}_1] + [\mathbf{E}_1\mathbf{G}] + [\mathbf{GPhE}_1]$$

Revoir la séance Maple sur les calcul de pH où nous avons développé cette notion.

Par ailleurs, ce problème était destiné à tester vos compétences en régression linéaire. Beaucoup ont malheureusement oublié les facteurs 10^{-5} qui figuraient dans le tableau de valeurs fourni.

Problème 2

L'esprit de cet exercice n'a pas été bien compris. Il s'agissait de faire le lien entre fonction de transfert et équation différentielle d'un circuit électrique. La plupart du temps, on peut déduire l'un de l'autre mais pas dans tous les cas. Le problème proposait un cas où cela ne fonctionne pas.

Problème 3

Problème extrait du concours des Petites Mines. La fin est intéressante car elle reprend la discussion que nous avons eu sur l'intérêt de la décomposition en série de FOURIER. À retravailler car cela n'a été abordé.

Problème 4

Problème sur l'analogie mécanique – électricité. La notion de décrement logarithmique que l'on peut décliner dans les deux situations paraît totalement inconnue. Il faudra revenir dessus en TP.

Problème 1

1- L'enzyme \mathbf{E}_1 se retrouve sous les formes \mathbf{E}_1 , $\mathbf{E}_1\mathbf{G}$, \mathbf{GPhE}_1 , d'où le bilan de matière :

$$[\mathbf{E}_1]_0 = [\mathbf{E}_1] + [\mathbf{E}_1\mathbf{G}] + [\mathbf{GPhE}_1]$$

La loi de GULDBERG et WAAGE appliquée aux réactions (\mathbf{R}_2) et (\mathbf{R}_4) conduit à :

$$K_2 = \frac{[\mathbf{E}_1\mathbf{G}]}{[\mathbf{E}_1][\mathbf{G}]} \quad \text{et} \quad K_4 = \frac{[\mathbf{GPhE}_1]}{[\mathbf{GPh}][\mathbf{E}_1]}$$

d'où on tire $[\mathbf{E}_1] = \frac{[\mathbf{E}_1\mathbf{G}]}{K_2[\mathbf{G}]}$ et $[\mathbf{GPhE}_1] = K_4[\mathbf{GPh}][\mathbf{E}_1]$. Finalement, on en déduit :

$$[\mathbf{E}_1]_0 = [\mathbf{E}_1\mathbf{G}] \left(1 + \frac{1 + K_4[\mathbf{GPh}]}{K_2[\mathbf{G}]} \right)$$

2- La vitesse de formation de \mathbf{GPh} vaut :

$$v_1 = \frac{d[\mathbf{GPh}]}{dt} = k_3[\mathbf{E}_1\mathbf{G}][\mathbf{ATP}]$$

$[\mathbf{E}_1\mathbf{G}]$ se déduit de la question précédente, d'où

$$v_1 = k_3[\mathbf{ATP}] \frac{[\mathbf{E}_1]_0}{1 + \frac{1 + K_4[\mathbf{GPh}]}{K_2[\mathbf{G}]}}$$

3- Une régression linéaire conduit à $\frac{1}{v_{1,0}} = b_1 + a_1 \frac{1}{[\mathbf{G}]_0}$ avec

$$\begin{cases} a_1 &= 1,098 \text{ min} \\ b_1 &= 7,576 \times 10^3 \text{ mol}^{-1} \cdot \text{L} \cdot \text{min} \end{cases}$$

4- D'après 2-, on sait que $\frac{1}{v_{1,0}} = \frac{1}{k_3[\mathbf{ATP}]_0[\mathbf{E}_1]_0} + \frac{1 + K_4[\mathbf{GPh}]_0}{K_2 k_3[\mathbf{ATP}]_0[\mathbf{E}_1]_0} \frac{1}{[\mathbf{G}]_0}$. On en déduit :

$$k_3[\mathbf{ATP}]_0[\mathbf{E}_1]_0 = \frac{1}{b_1} \quad \text{et} \quad k_3 = \frac{1}{b_1[\mathbf{ATP}]_0[\mathbf{E}_1]_0} = 2,640 \times 10^3 \text{ mol}^{-1} \cdot \text{L} \cdot \text{min}^{-1}$$

5- Une régression linéaire donne : $\frac{1}{v_{1,0}} = b_2 + a_2[\mathbf{GPh}]_0$ avec

$$\begin{cases} a_2 &= 6,819 \times 10^7 \text{ mol}^{-2} \cdot \text{L}^2 \cdot \text{min} \\ b_2 &= 9,090 \times 10^3 \text{ mol}^{-1} \cdot \text{L} \cdot \text{min} \end{cases}$$

6- D'après 2-, on sait que

$$\frac{1}{v_{1,0}} = \frac{1}{k_3 [\text{ATP}]_0 [\text{E}_1]_0} + \frac{1}{K_2 k_3 [\text{ATP}]_0 [\text{E}_1]_0 [\text{G}]_0} + \frac{K_4}{K_2 k_3 [\text{ATP}]_0 [\text{E}_1]_0 [\text{G}]_0} [\text{GPh}]_0.$$

On en déduit :

$$\frac{1}{K_2} = k_3 [\text{ATP}]_0 [\text{E}_1]_0 [\text{G}]_0 \left(b_2 - \frac{1}{k_3 [\text{ATP}]_0 [\text{E}_1]_0} \right)$$

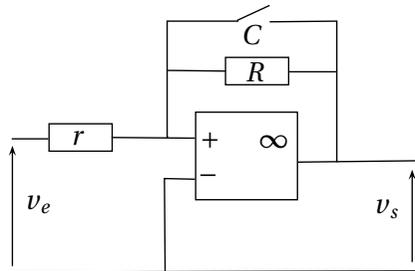
soit

$$K_2 = \frac{1}{k_3 [\text{ATP}]_0 [\text{E}_1]_0 [\text{G}]_0 b_2 - [\text{G}]_0} = 10^4$$

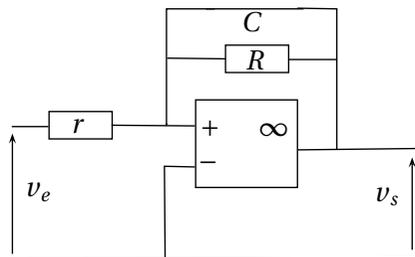
Par ailleurs, $\frac{a_2}{b_2} = \frac{K_4}{K_2 [\text{G}]_0 + 1}$, d'où $K_4 = (K_2 [\text{G}]_0 + 1) \frac{a_2}{b_2} = 4,5 \times 10^4$

Problème 2

1 - On exploite le fait qu'à basse fréquence, le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert et à haute fréquence comme un fil. Pour le premier montage, on a, à basse fréquence, le schéma équivalent suivant :

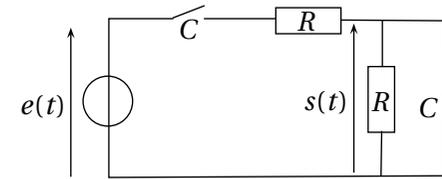


On reconnaît un montage amplificateur inverseur, le signal passe donc. A haute fréquence, on a la situation suivante :

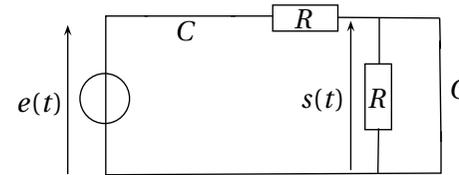


On remarque que $v^+ = v_s$ et $v^- = 0$. Or $v^+ = v^-$ car on est en fonctionnement linéaire. On en déduit $v_s = 0$. On a ainsi affaire à un *passé-bas*.

Le second montage devient à basse fréquence :



Le courant est nul dans les résistances, d'où $s = 0$. Le premier montage devient à haute fréquence :



Aux bornes d'un fil $s = 0$. Ce montage est un *passé-bande*.

2 - L'AO est en fonctionnement linéaire, donc $v^+ = v^-$. Comme $v^- = 0$, on en déduit $v^+ = 0$.

Appliquons la loi des nœuds à la borne non-inverseuse où $v^+ = 0$.

$$\frac{V_e}{r} + \frac{V_s}{R} + \frac{V_s}{1/jC\omega} = 0$$

d'où

$$\begin{aligned} \underline{H} &= \frac{V_s}{V_e} = -\frac{\frac{1}{r}}{\frac{1}{R} + jC\omega} \\ &= \left(-\frac{R}{r}\right) \frac{1}{1 + jRC\omega} \end{aligned}$$

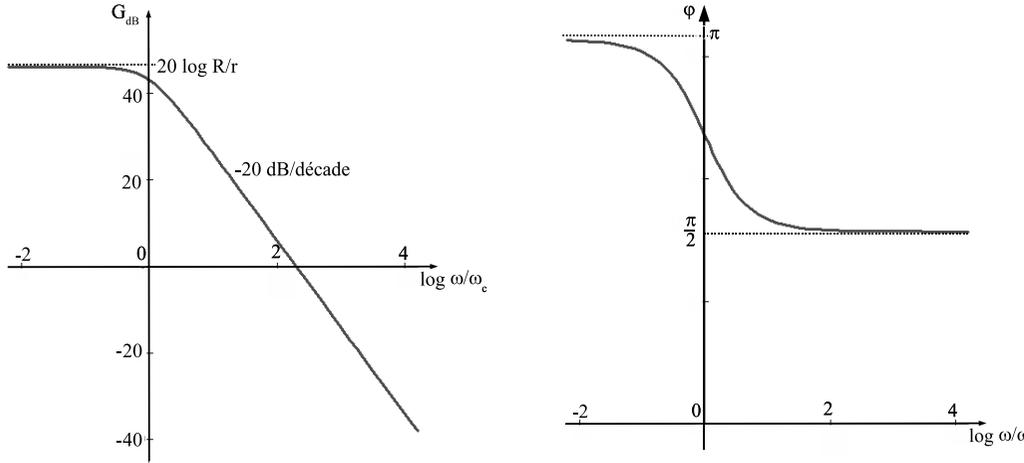
On reconnaît la fonction de transfert d'un filtre passe-bas de pulsation de coupure $\omega_c = \frac{1}{RC}$.

3 - **En BF** ($\omega \ll \omega_c$) : $\underline{H} \simeq \frac{-R}{r} = -\frac{R}{r}$ d'où $G_{dB} = 20 \log |\underline{H}| \simeq 20 \log \frac{R}{r}$ et $\varphi = \text{Arg} |\underline{H}| \simeq \pm\pi$

Pour $\omega = \omega_c$: $\underline{H}(j\omega_c) = \frac{-R}{1+j}$ d'où $G_{dB} = 20 \log |\underline{H}| = 20 \log \frac{R}{r} + 20 \log \frac{1}{\sqrt{2}} \simeq 20 \log \frac{R}{r} - 3$ dB et $\varphi = \text{Arg} |\underline{H}| = \frac{3\pi}{4}$. Par continuité de φ on retiendra la valeur $+\pi$ en BF.

En HF ($\omega \gg \omega_c$) : $\underline{H} \approx \frac{-R}{jRC\omega} = j\frac{R}{RC\omega}$ d'où $G_{dB} = 20\log|\underline{H}| \approx 20\log\frac{R}{r} + 20\log\frac{1}{RC\omega} \approx 20\log\frac{R}{r} - 20\log RC - 20\log\omega \approx 20\log\frac{R}{r} - 20\log\frac{\omega}{\omega_c}$. La courbe admet une asymptote de pente -20dB/décade . $\varphi = \text{Arg}|\underline{H}| \approx +\frac{\pi}{2}$.

Le Diagramme de BODE est donné ci-dessous :



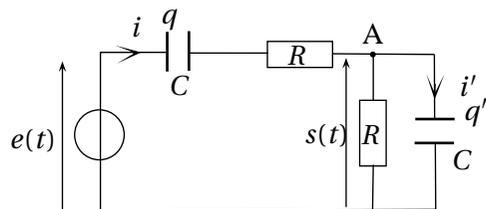
On reconnaît bien un filtre passe-bas du premier ordre. Pour $R > r$, le gain en basse fréquence dépasse 0 dB, on a alors un filtre amplificateur. Si, au contraire, $r > R$, c'est un filtre atténuateur.

4 - La loi des nœuds en A s'écrit :

$$i = \frac{dq'}{dt} + \frac{s}{R} = C\frac{ds}{dt} + \frac{s}{R} \quad (1)$$

La loi des mailles donne :

$$e = s + Ri + \frac{q}{C} \quad \text{soit} \quad \frac{de}{dt} = \frac{ds}{dt} + \frac{di}{dt} + \frac{i}{C} \quad (2)$$



En reportant (1) dans (2), il vient :

$$\frac{de}{dt} = \frac{ds}{dt} + RC\frac{d^2s}{dt^2} + \frac{ds}{dt} + \frac{s}{RC}$$

soit

$$\frac{d^2s}{dt^2} + 3\omega_0\frac{ds}{dt} + \omega_0^2s = \omega_0\frac{de}{dt} \quad (3)$$

où $\omega_0 = \frac{1}{RC}$.

5 - Le condensateur et la résistance en parallèle ont pour admittance :

$$\underline{Y} = \frac{1}{R} + jC\omega = \frac{1}{\underline{Z}}$$

La formule du pont diviseur de tension conduit à :

$$\underline{H} = \frac{\underline{Z}}{\underline{Z} + R + 1/jC\omega} = \frac{1}{1 + \underline{Y}(R + 1/jC\omega)}$$

soit

$$\underline{H} = \frac{1}{3 + jRC\omega + \frac{1}{jRC\omega}} = \frac{\frac{1}{3}}{1 + j\frac{1}{3}\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$$

En posant $\omega_0 = \frac{1}{RC}$, $H_0 = \frac{1}{3}$ et $Q = \frac{1}{3}$, il vient :

$$\underline{H} = \frac{H_0}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$$

C'est la fonction de transfert d'un passe-bande.

Faisons l'étude de la fonction de transfert :

En BF $\omega \ll \frac{1}{RC}$, on a

$$\underline{H} \approx \frac{1}{-j\frac{1}{RC\omega}} = jRC\omega \quad \text{d'où} \quad \varphi = \frac{\pi}{2} \quad \text{et}$$

$$G_{dB} \approx 20\log RC\omega \quad \text{asymptote à} \quad +20\text{dB/déc}$$

Pour $\omega = \omega_0 = \frac{1}{RC}$

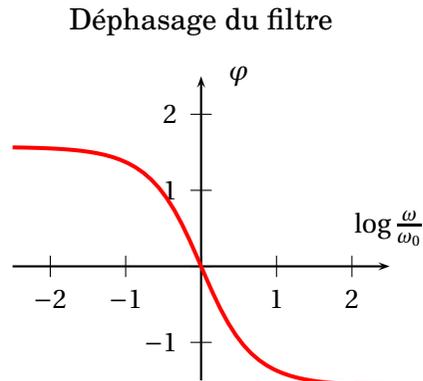
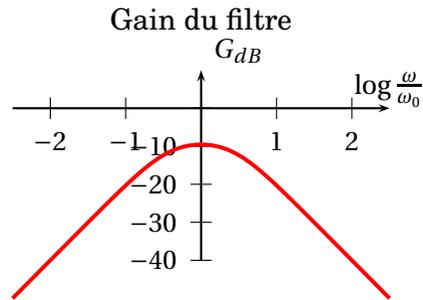
$$\underline{H} = \frac{1}{3} \quad \text{d'où} \quad G_{dB} = 20\log\frac{1}{3} \approx -9,5 \quad \text{et} \quad \varphi = 0$$

En **HF**, on a

$$\underline{H} \approx \frac{1}{jRC\omega} = \frac{-j}{RC\omega} \text{ d'où } \varphi = -\frac{\pi}{2} \text{ et}$$

$$G_{dB} \approx -20 \log RC\omega \text{ asymptote à } -20\text{dB/déc}$$

Ce qui permet de tracer le diagramme de BODE



6 - La fonction de transfert peut se réécrire sous la forme :

$$\underline{H} = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{1}{3 + jRC\omega + \frac{1}{jRC\omega}} = \frac{j\omega/(RC)}{1/(RC)^2 + 3j\omega/(RC) - \omega^2}$$

d'où on tire

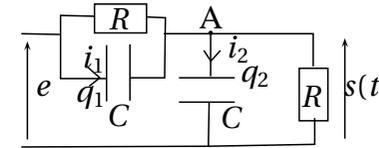
$$-\omega^2 \underline{s} + 3j\omega\omega_0 \underline{s} + \omega_0^2 \underline{s} = j\omega\omega_0 \underline{e}$$

$$\text{où } \omega_0 = \frac{1}{RC}.$$

La dérivation correspond à la multiplication par $j\omega$ en représentation complexe. On retrouve ainsi l'équation différentielle :

$$\frac{d^2s}{dt^2} + 3\omega_0 \frac{ds}{dt} + \omega_0^2 s = \omega_0 \frac{de}{dt}$$

7 - On considère maintenant le montage ci-dessous :



On a $i_1 = \frac{dq_1}{dt} = C \frac{d(e-s)}{dt}$ et $i_2 = \frac{dq_2}{dt} = C \frac{ds}{dt}$. La loi des nœuds en A s'écrit :

$$C \frac{d(e-s)}{dt} + \frac{e-s}{R} = C \frac{ds}{dt} + \frac{s}{R}$$

ce qui s'écrit encore :

$$2RC \frac{ds}{dt} + 2s = RC \frac{de}{dt} + e$$

Cela correspond à l'équation demandée :

$$2 \left(\frac{ds}{dt} + \omega_1 s \right) = \frac{de}{dt} + \omega_1 e$$

$$\text{où } \omega_1 = \frac{1}{RC}.$$

8 - La fonction de transfert de ce montage vaut ici, avec $\underline{Y}_2 = \frac{1}{R} + jC\omega$:

$$\underline{H} = \frac{\underline{S}}{\underline{E}} = \frac{\frac{1}{\underline{Y}_2}}{\frac{1}{\underline{Y}_2} + \frac{1}{\underline{Y}_2}} = \frac{1}{2}$$

La relation temporelle que l'on pourrait en déduire est $2s(t) = e(t)$, ce qui n'est pas du tout l'équation différentielle du montage.

En revanche, l'équation différentielle donne en complexe :

$$2(jRC\omega + 1)\underline{S} = (jRC\omega + 1)\underline{E}$$

On peut donc retrouver la fonction de transfert obtenue précédemment. On voit en effet que de chaque côté de l'égalité, on retrouve le même facteur $jRC\omega + 1$ qui se simplifie. Évidemment à partir de $2\underline{S} = \underline{E}$, il est bien impossible de revenir à l'équation différentielle.

Il faut bien se souvenir que lorsqu'on travaille en complexe, on est uniquement en régime sinusoïdal forcé et qu'on ne tient pas compte du régime transitoire. L'équation différentielle peut être utilisée avec tout type de signal et on doit tenir compte des conditions initiales pour la résoudre complètement. Il y a donc plus d'information dans l'équation différentielle que dans la fonction de transfert, ce qui explique que l'on peut toujours passer de l'équation différentielle à la fonction de transfert, l'inverse n'est pas toujours vrai comme on le voit dans ce problème.

Problème 3

1 - Dédoublément de fréquence

En sortie du multiplieur, le signal vaut :

$$\begin{aligned} m(t) &= a(t)e_0(t) \\ &= 2AE_0 \cos(2\pi f_a t) \cos(2\pi f_0 t + \varphi_0) \\ &= AE_0 \cos[2\pi(f_0 - f_a)t + \varphi_0] + \\ &\quad AE_0 \cos[2\pi(f_0 + f_a)t + \varphi_0] \end{aligned}$$

$m(t)$ est ainsi la somme de deux signaux sinusoïdaux de fréquence $f = f_0 - f_a = 30$ Hz et $f' = f_0 + f_a = 2870$ Hz.

2-a En basse fréquence, le condensateur se comporte comme un circuit ouvert : On a un diviseur de tension et $s(t) = \frac{1}{2}e(t)$;

En haute fréquence, le condensateur se comporte comme un fil, on a $s = 0$: c'est un passe bas.

2-b On a un diviseur de tension :

$$\underline{H} = \frac{\underline{Z}_{R\parallel C}}{R + \underline{Z}_{R\parallel C}}$$

$$\text{avec } \underline{Z}_{R\parallel C} = \frac{\frac{R}{jC\omega}}{R + \frac{R}{jC\omega}} = \frac{R}{1 + jRC\omega}$$

La fonction de transfert est :

$$\underline{H} = \frac{\frac{R}{1 + jRC\omega}}{R + \frac{R}{1 + jRC\omega}} = \frac{1}{2 + jRC\omega}$$

Avec $x = \omega RC$, on a $\underline{H} = \frac{\frac{1}{2}}{1 + j\frac{1}{2}x}$

2-c On reconnaît la forme canonique d'un filtre passe-bas de fréquence de coupure :

$$\omega_c = \frac{2}{RC}$$

2-d On détermine f_c soit par la fréquence de coupure soit par intersection des asymptotes : $f_c = 150$ Hz d'où $RC = 2.1$ ms.

2-e En haute fréquence, $\underline{H} \simeq \frac{1}{jx}$. On reconnaît l'opérateur intégration caractérisé par une pente de -20 dB/dc et un déphasage qui tend vers -90°

3-a Il y a une chute de 26.25 dB entre 30 Hz et $f' = 2870$ Hz ; Les deux fréquences ont la même amplitude $M = AE_0$. On a donc

$$20 \log \frac{S}{M} - 20 \log \frac{S'}{M} = 26,25 \text{ dB}$$

d'où $20 \log \frac{S}{S'} = 26,25$ soit $\frac{S}{S'} = 10^{\frac{26,25}{20}} = 20,5$

3-b En réalité seule la fréquence basse se retrouve en sortie du filtre. C'est donc la différence entre 1450 et 1420 MHz soit 30 MHz.

Problème 4

A - Pour le circuit RLC, la loi des mailles conduit à :

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = e(t) \quad (4)$$

La Relation Fondamentale de la Dynamique (RFD) appliquée dans le référentiel galiléen du laboratoire à la masse en mouvement s'écrit en projection

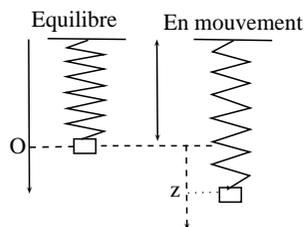
sur l'axe des Oz :

$$0 = mg - k(\ell_{\text{eq}} - \ell_0) \text{ à l'équilibre} \quad (5)$$

$$m\ddot{z} = mg - k(\ell_{\text{eq}} + z - \ell_0) - h\dot{z} + F \quad (6)$$

lorsqu'il y a mouvement. On en déduit, en soustrayant ces deux équations

$$m\ddot{z} + h\dot{z} + kz = F \quad (7)$$



On peut en déduire le tableau d'analogie suivant :

z	F	m	h	k	v
q	e	L	R	1/C	i

B - Pour $t \geq 0$ la forme canonique de l'équation électrique est :

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = 0 \quad (8)$$

avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$ et $\frac{R}{L} = \frac{\omega_0}{Q}$

Pour le système mécanique, on a :

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dz}{dt} + \omega_0^2 z = 0 \quad (9)$$

avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ et $\frac{h}{m} = \frac{\omega_0}{Q}$

Dans le cas d'un régime pseudo-périodique, les solutions sont de la forme :

$$z(\text{ou } q) = e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t} A \cos\left(\omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}t + \varphi\right)$$

Le décrétement logarithmique est défini par :

$$\delta = \ln \frac{q(t)}{q(t+T)} = \frac{\omega_0}{2Q} T = \frac{\omega_0}{2Q} \frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}$$

d'où on sort : $Q = \sqrt{\frac{\pi^2}{\delta^2} + \frac{1}{4}}$.

Pour $\delta = 0,75$, on trouve $Q_{\text{elec}} = Q_{\text{méca}} = 4,2$.

A partir de la pseudo-période T , on peut calculer $\omega_0 = \frac{2\pi}{T\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}$. On calcule

$$\omega_0 \text{ méca} = 4,5 \text{ rad.s}^{-1} \text{ et } \omega_0 \text{ élec} = 4,5.10^3 \text{ rad.s}^{-1}.$$

A partir de $\omega_0 \text{ méca} = \sqrt{\frac{k}{m}}$, on trouve $k = m\omega_0^2 \text{ méca} = 2,0 \text{ N.m}^{-1}$, puis de $\frac{h}{m} = \frac{\omega_0}{Q}$

on tire $h = \frac{m\omega_0}{Q} = 0,1 \text{ N s m}^{-1}$.

A partir de $\omega_0 \text{ élec} = \sqrt{\frac{1}{LC}}$, on trouve $C = \frac{1}{L\omega_0^2 \text{ élec}} = 4,9 \mu\text{F}$, puis de $\frac{R}{L} = \frac{\omega_0}{Q}$ on

tire $R = \frac{L\omega_0}{Q} = 10\Omega$.

C - L'équation électrique (8) peut s'écrire :

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int i dt = e(t) \quad (10)$$

En passant en complexe, on obtient :

$$jL\omega \underline{I} + R\underline{I} + \frac{\underline{I}}{jC\omega} = \underline{E} \quad (11)$$

Il y a résonance d'intensité pour la pulsation $\omega = \omega_0$ lorsque l'amplitude de l'intensité donnée par $|\underline{I}|$ passe par un maximum.

D'après le tableau d'équivalence, cela correspond en mécanique à la résonance de vitesse qui s'étudie à partir de l'équation :

$$m \frac{dv}{dt} + hv + k \int v dt = F(t) \quad (12)$$

En passant en complexe, on obtient :

$$jm\omega \underline{V} + h\underline{V} + \frac{k}{jC\omega} \underline{V} = \underline{F} \quad (13)$$

La résonance d'élongation est possible lorsque $Q \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,7$. C'est donc possible ici. Cela correspond à un maximum de l'amplitude de la charge aux bornes du condensateur, c'est à dire aussi à un maximum de la tension aux bornes du condensateur. On parle de phénomène de *surtension* dans ce cas.

D - L'impédance électrique du circuit découle de la relation : $\underline{Z}I = \underline{E}$. On a

donc en utilisant la relation(11) : $\underline{Z} = jL\omega + R + \frac{1}{jC\omega}$.

On déduit l'impédance mécanique du système de l'équation analogue (13) et de la relation : $\underline{Z}_{\text{méca}}\underline{V} = \underline{F}$. On a ainsi :

$$\underline{Z}_{\text{méca}} = jm\omega + h + \frac{k}{j\omega} \quad (14)$$