

## Pour 2 heures de devoir ne pas traiter le Problème 3

**NB :** Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées.

Toute application numérique ne comportant pas d'unité ne donnera pas lieu à attribution de points.

Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

## Problème 1

Dans le référentiel géocentrique  $\mathcal{R}_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ ,  $O\vec{z}_0$  étant l'axe de rotation de la Terre, on considère un lieu de latitude  $\lambda$  et le référentiel terrestre  $\mathcal{R}_T(A, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  où  $\vec{z}_1$  est la verticale ascendante (Figure 1).

En  $A$ , un canon tire dans le plan  $(A, \vec{x}_1, \vec{z}_1)$  un obus, assimilable à un point matériel  $M$  de masse  $m$ , dont la vitesse initiale  $\vec{v}_0$  fait avec le plan horizontal un angle  $\alpha$  (Figure 2).

On néglige la résistance de l'air ainsi que la variation de l'accélération de la pesanteur  $\vec{g} = -g\vec{z}_1$  avec l'altitude.

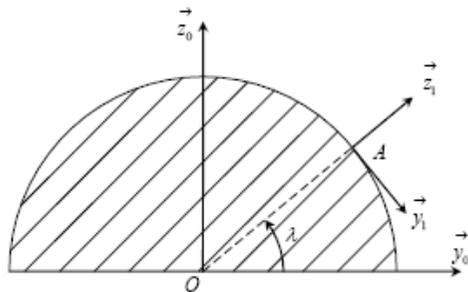


Figure 1

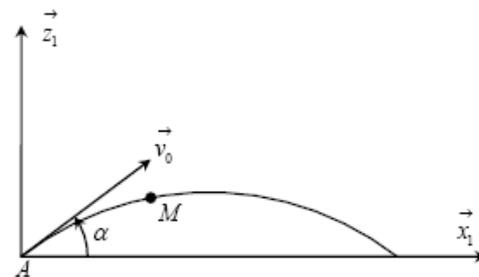


Figure 2

On pose  $\vec{OM} = x\vec{x}_1 + y\vec{y}_1 + z\vec{z}_1$

On considère tout d'abord le référentiel terrestre comme galiléen.

1 Dans le repère  $\mathcal{R}_T$ , déterminer l'équation de la trajectoire de l'obus.

2 Exprimer la portée  $P$  et l'altitude maximale  $z_{\max}$  atteinte en fonction de  $v_0$ ,  $\alpha$  et  $g$ .

3 Application numérique : Calculer  $P$  et  $z_{\max}$  pour  $\alpha = 30^\circ$ ,  $v_0 = 800 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$  et  $g = 9,8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ .

On tient compte maintenant de la force d'inertie de CORIOLIS.

4 Exprimer le vecteur rotation  $\vec{\Omega} = \omega\vec{z}_0$  de la Terre dans le repère  $\mathcal{R}_T$ .

5 En déduire l'expression de la force d'inertie de CORIOLIS  $\vec{F}_C$  dans le mouvement de  $\mathcal{R}_T$  par rapport à  $\mathcal{R}_0$  en fonction de  $m$ ,  $\omega$ ,  $\lambda$ , et des composantes  $\dot{x}$ ,  $\dot{y}$  et  $\dot{z}$  de la vitesse du point  $M$  dans  $\mathcal{R}_T$ . Pourquoi ne tiendra-t-on pas compte de la force d'inertie d'entraînement  $\vec{F}_e$  devant la force d'inertie de CORIOLIS ?

6 En appliquant le principe fondamental de la dynamique à l'obus dans  $\mathcal{R}_T$ , déterminer les équations différentielles du mouvement.

7 Intégrer les équations différentielles en  $\dot{y}$  et  $\dot{z}$  afin d'obtenir  $y$  et  $z$  en fonction de  $x$ ,  $t$ ,  $g$ ,  $\omega$ ,  $\lambda$ ,  $v_0$  et  $\alpha$ .

8 En déduire l'équation différentielle régissant le mouvement de l'obus suivant l'axe  $\vec{x}$ .

La vitesse de rotation de la Terre étant assez faible, on néglige le terme  $4\omega^2 x$  devant  $\ddot{x}$ .

9 En déduire l'équation donnant  $x$  en fonction du temps  $t$ .

10 En déduire les équations donnant  $y$  et  $z$  en fonction du temps  $t$ .

11 En négligeant les termes en  $\omega^2$  devant les autres, déterminer le temps  $t_2$  de retombée de l'obus.

Le point  $A$  possède une latitude  $\lambda = 45^\circ$

12 Application numérique : Calculer le temps  $t_2$  et la portée  $P_x$  suivant l'axe  $\vec{x}$  de l'obus. Conclure quant à une éventuelle déviation vers l'est de l'obus.

13 Application numérique : Calculer la portée  $P_y$  suivant l'axe  $\vec{y}$  de l'obus. Cette déviation est-elle vers le sud ou vers le nord ? Justifier.

## Problème 2

Lord RUTHERFORD a montré que les particules  $\alpha$  sont des noyaux d'hélium et a précisé la loi des transformations radioactives. Il a réalisé la première transmutation d'atome en 1919. En 1911, il réalise la célèbre expérience décrite ci-dessous qui lui permit d'élucider la structure de l'atome.

RUTHERFORD a étudié expérimentalement la déviation d'une particule  $\alpha$  (noyau d'hélium de masse  $m$  et de charge  $q = 2e$ ) par un noyau d'or (de masse  $M$  très grande par rapport à la masse de la particule  $\alpha$ , et de charge  $Q = Ze$ ) supposé immobile en O dans le référentiel du laboratoire.

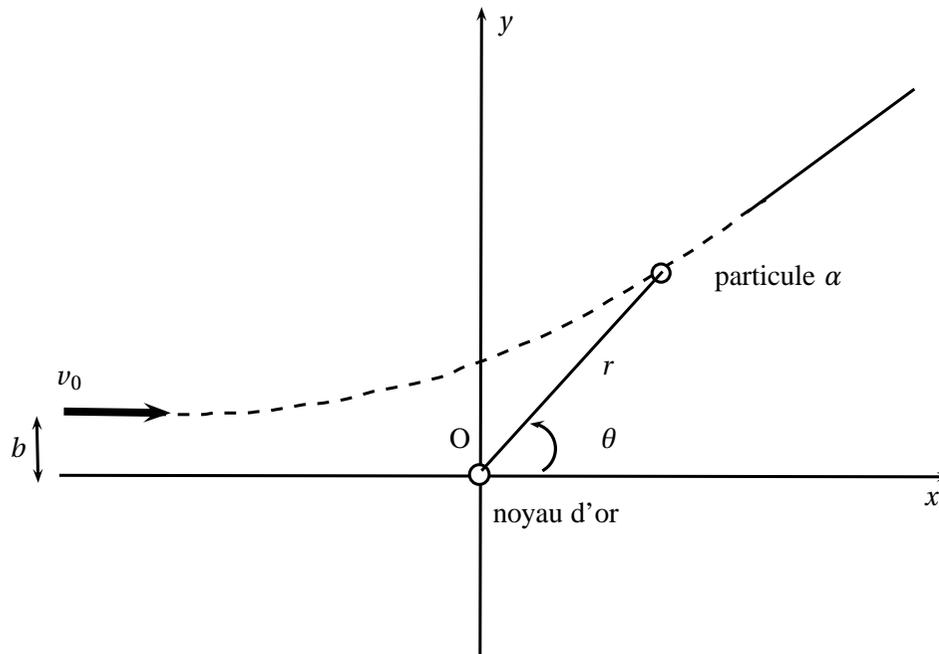
Dans tout le problème, on néglige la force de gravitation entre les deux noyaux et le poids des noyaux, seule la force de COULOMB joue un rôle.

La particule  $\alpha$  est lancée à une vitesse initiale  $v_0$  vers le noyau cible, avec un paramètre d'impact  $b$ , comme le montre la figure ci-dessous.

1. Montrer que le moment cinétique en O de la particule  $\alpha$  est constant. Calculer sa valeur à  $t = 0$  en fonction de  $b$ ,  $m$  et  $v_0$ . Donner son expression à un instant quelconque en fonction de  $m$ ,  $\theta$  et  $r$ .

Montrer que le mouvement est plan.

2. Donner l'expression de l'énergie potentielle  $E_p$  du système particule  $\alpha$  – noyau d'or en fonction de  $e$ ,  $Z$ ,  $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$  et  $r$  la distance entre les deux particules. On choisira la constante d'intégration telle que  $E_p = 0$  lorsque les deux particules sont à l'infini l'une de l'autre.



3. On note  $v$  la vitesse de la particule  $\alpha$  dans le référentiel galiléen du laboratoire. Comment s'exprime l'énergie mécanique  $E_m$  du système

particule  $\alpha$  – noyau d'or? Pour quelle raison  $E_m$  est-elle constante? Qu'appelle-t-on énergie potentielle effective du système?

4. Que vaut  $E_m$  à  $t = 0$  en fonction de  $m$  et  $v_0$  (on supposera que la distance  $r$  est infiniment grande devant la dimension des particules)? Sachant qu'à la fin du mouvement la particule  $\alpha$  est à nouveau infiniment loin, quelle est sa vitesse?
5. Au moment de la plus courte approche de la particule  $\alpha$ , que vaut l'énergie mécanique  $E_m$ ? Que faut l'énergie potentielle effective? En déduire la valeur minimale de  $r$  qu'on notera  $r_{\min}$  en fonction de  $e$ ,  $Z$ ,  $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ ,  $m$ ,  $v_0$  et  $b$ .
6. Calculer  $r_{\min}$  dans le cas  $b = 0$ . Est-ce conforme ce que l'on attend? Application numérique :  $m = 6,64 \cdot 10^{-27}$  kg,  $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$  C,  $v_0 = 1,7 \cdot 10^7$  m.s<sup>-1</sup>, pour l'or  $Z = 79$ ,  $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \cdot 10^9$  SI. Qu'a pu déduire RUTHERFORD de cette valeur?
7. Quelle est la nature du mouvement de la particule  $\alpha$  loin du noyau d'or? Rappeler sans démonstration quelle est la nature de la trajectoire dans le cas d'un mouvement à force centrale newtonienne? En déduire la nature de la trajectoire de la particule  $\alpha$ .
8. Ecrire la Relation Fondamentale de la Dynamique (RFD). Ecrire la projection de la RFD sur l'axe des  $x$  et l'intégrer entre  $t = 0$  où  $v_x = v_0$  et  $\theta \simeq \pi$  et  $t \rightarrow \infty$  où  $v_x = v_0 \cos D$  et  $\theta \simeq D$ .  $D$  représente la déviation subie par la particule  $\alpha$ . On pourra exploiter une relation déduite de la question 1.. En déduire que la déviation est donnée par la relation :

$$\tan\left(\frac{D}{2}\right) = \frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0 m v_0^2 b}$$

9. En réalité le noyau d'or bouge dans le référentiel du laboratoire. On peut toujours considérer que le système particule  $\alpha$  – noyau d'or constitue un système isolé. Ecrire en quelques lignes la procédure utilisée pour étudier la trajectoire de la particule  $\alpha$ .

## Pour 2 heures de devoir ne pas traiter le Problème 3

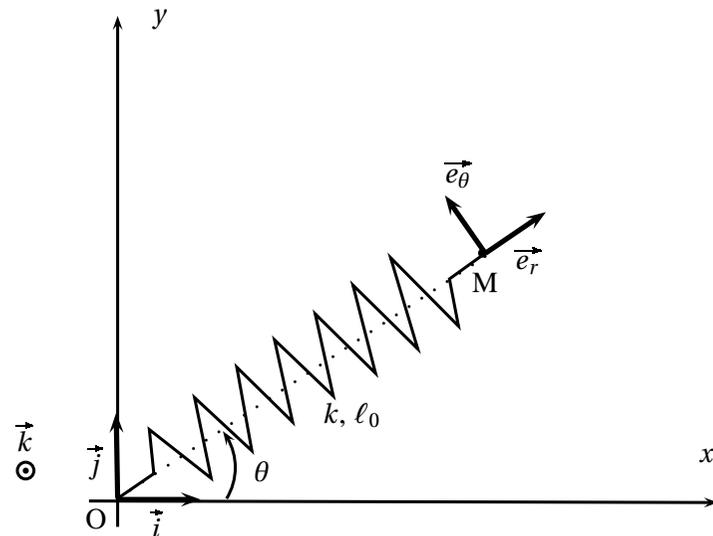
### Problème 3

#### Étude d'un ressort dans deux référentiels

Attention : Ce problème n'est pas une étude comparée dans les deux référentiels.

**A- Etude dans le référentiel R du laboratoire :** Le mouvement est étudié dans le référentiel du laboratoire assimilé à un référentiel galiléen et associé à un repère  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . Un palet M de masse  $m$  peut se mouvoir sans frottement dans le plan horizontal (table à coussin d'air par exemple). Le champ de pesanteur est suivant la verticale Oz :  $\vec{g} = -g\vec{k}$ .

La masse  $m$  est accrochée à l'extrémité d'un ressort (point M) de longueur à vide  $\ell_0$ , de raideur  $k$ , dont l'autre extrémité est fixée en O. La position de M est repérée dans la base  $(\vec{i}, \vec{j})$  par  $\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$  ou dans la base  $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$  par  $\vec{OM} = r\vec{e}_r$ .



**A-1** Faire un bilan des forces. Montrer qu'il y a conservation du moment cinétique,  $\vec{L}_O$  par rapport à O.

**A-2** A  $t = 0$ , la masse est lâchée, sans vitesse initiale d'une longueur  $1,2\ell_0$  :  $\vec{OM}(t = 0) = 1,2\ell_0\vec{i}$ .

**A-2-1** Calculer  $\vec{L}_O$ . Quelle est la nature de la trajectoire ?

**A-2-2** Déterminer l'évolution temporelle de la longueur du ressort,  $\ell(t) = OM(t)$ . Préciser l'intervalle de variation de  $\ell$ , longueur du ressort.

**A-3** On lance la particule d'un point  $\vec{OM}_0 = \vec{OM}(t = 0) = \ell_1\vec{i}$ , avec une vitesse initiale  $\vec{v}_0 = \ell_1\omega\vec{j}$ , orthogonale à  $\vec{OM}_0$ . Dans la suite, on travaillera en coordonnées polaires dans le plan  $(0, x, y)$ .

**A-3-1** Préciser  $\vec{L}_O$  en fonction de  $r$  et de  $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$  puis en fonction des conditions initiales et des vecteurs de base. On notera  $L$ , le module de  $\vec{L}_O$ .

**A-3-2** Rappeler l'expression de l'énergie potentielle élastique.

Doit-on tenir compte de l'énergie potentielle de pesanteur pour étudier le mouvement ?

Montrer qu'il y a conservation de l'énergie mécanique,  $E_m$ .

Préciser l'expression de  $E_m$  :

- en fonction des conditions initiales,

- en fonction de  $r$ ,  $\dot{r} = \frac{dr}{dt}$ ,  $\dot{\theta}$ ,  $m$ ,  $k$  et  $\ell_0$ .

**A-3-3** Montrer que l'énergie mécanique peut s'écrire :

$$E_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + E_{\text{eff}}(r)$$

Préciser l'expression de  $E_{\text{eff}}(r)$ . Tracer l'allure de  $E_{\text{eff}}(r)$ .

**A-3-4** La masse peut-elle s'éloigner indéfiniment du pôle d'attraction ?

**A-3-5** La vitesse de la particule peut-elle s'annuler au cours de son mouvement ?

**A-3-6** La particule peut-elle passer par le centre d'attraction au cours de son mouvement ?

**A-4** On cherche à déterminer une condition entre  $\ell_1$  et  $\omega$  pour avoir un mouvement circulaire.

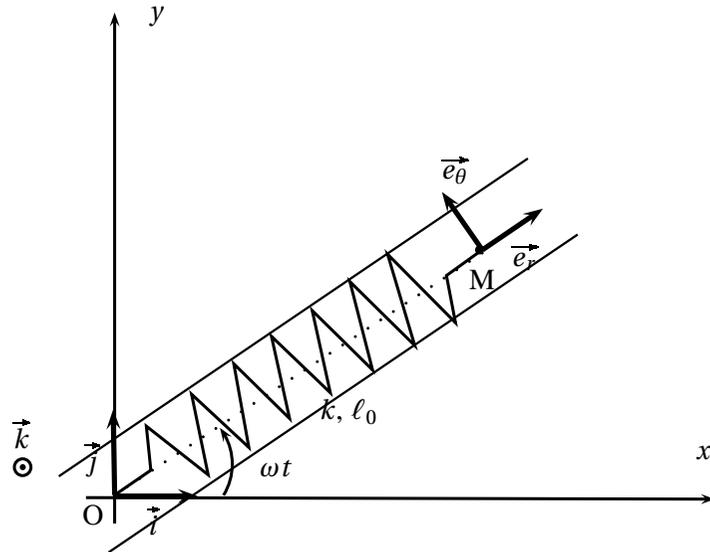
**A-4-1** Montrer que dans ce cas, le mouvement est uniforme.

**A-4-2** Déterminer  $\ell_1$  en fonction de  $k$ ,  $\ell_0$  et  $\omega$ . Est-elle valable pour tout  $\omega$  ?

### B - Étude dans un référentiel R' en rotation uniforme autour d'un axe fixe :

Le mouvement est étudié dans le référentiel R' en rotation uniforme autour d'un axe Oz fixe, de vecteur vitesse  $\vec{\Omega} = \omega\vec{k}$ , et associé au repère  $(O, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{k})$ . On considère une particule M de masse  $m$  pouvant se mouvoir sans frottement le long de l'axe  $(O, \vec{e}_r)$ . Le champ de pesanteur est toujours suivant la verticale Oz :  $\vec{g} = -g\vec{k}$ .

La masse  $m$  est accrochée à l'extrémité d'un ressort ( point M) de longueur à vide  $\ell_0$ , de raideur  $k$ , dont l'autre extrémité est fixée en O. La position de M est repérée dans la base  $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$  par  $\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r$ .



**B-1** Préciser les expressions vectorielles des forces d'inertie dans la base  $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{k})$ .

**B-2** Montrer que la force d'inertie d'entraînement dérive d'une énergie potentielle  $E_{pfi_e}$  que l'on précisera.

**B-3** En est-il de même pour la force d'inertie de CORIOLIS ou complémentaire?

**B-4** Déterminer l'énergie potentielle totale. Tracer l'allure de  $E_p(r)$ . On distinguera les 3 cas possibles selon la valeur de  $\omega$ .

**B-5** Déterminer la longueur  $\ell_2$  correspondant à la position d'équilibre dans le référentiel  $R'$ .

A quelle condition sur  $\omega$  le résultat est-il possible? Cet équilibre est-il stable? Quel est alors le mouvement dans le référentiel du laboratoire?

**B-6** Comparer  $\ell_2$  à  $\ell_1$  du paragraphe précédent. Conclusion.

# Commentaires et correction :

## Problème 1

Ce problème explore l'influence de la rotation de la Terre sur le mouvement parabolique d'un corps en chute libre.

La première partie correspond à un calcul vu au lycée qui est accessible à tous (calcul de portée, de hauteur maximale dans le référentiel terrestre galiléen).

Vient ensuite le calcul de la force de Coriolis. Cette dernière doit être connue par cœur. Pour calculer le produit vectoriel, il est préférable d'exprimer les deux vecteurs dans la même base. Le meilleur choix était évidemment celui de la base avec son origine à la surface de la Terre et pas au centre.

On ne tient pas compte de la force d'inertie d'entraînement car elle est déjà comptabilisée dans le poids, pas parce qu'elle est négligeable.

Les calculs qui s'en suivent ont été très discriminants. Très peu sont arrivés au bout.

## Problème 2

Ce problème reprend l'une des expériences les plus célèbres de l'histoire de la physique : l'expérience de Rutherford de 1911 qui a permis de connaître la structure de l'atome. Pour ce type de problème sur les forces centrales, il faut absolument être capable :

- d'utiliser le Théorème du Moment Cinétique pour montrer que le moment cinétique est constant,
- de montrer que le mouvement est plan,
- que le mouvement suit la loi des aires,
- de calculer l'énergie potentielle à partir du travail élémentaire,
- de démontrer que l'énergie mécanique est constante
- de définir l'énergie potentielle efficace
- de connaître les différentes trajectoires et leurs propriétés vis à vis de l'énergie mécanique,
- de connaître les lois de Kepler.

Tout n'était pas nécessaire ici mais beaucoup.

Etudier la fin avec la projection de la RFD et l'introduction du moment cinétique. C'est un calcul classique, personne n'y est venu à bout, c'est donc un calcul difficile. À connaître !

## Problème 1

1. Dans le référentiel terrestre galiléen, la RFD conduit à :

$$m\vec{a} = m\vec{g}$$

Après simplification par  $m$  et projection sur les axes, on obtient :

$$\begin{aligned} \ddot{z}_1 &= -g \text{ d'où} & \dot{z}_1 &= -gt + v_0 \sin \alpha \text{ et} \\ & & z_1 &= -g \frac{t^2}{2} + v_0 \sin \alpha t \\ \ddot{x}_1 &= 0 \text{ d'où} & \dot{x}_1 &= v_0 \cos \alpha \text{ et} \\ & & x_1 &= v_0 \cos \alpha t \\ \ddot{y}_1 &= 0 \text{ d'où} & \dot{y}_1 &= 0 \text{ et } y_1 = 0 \end{aligned}$$

On a intégré les relations successivement par rapport au temps. On obtient l'équation de la trajectoire en éliminant  $t$  dans les équations. On a  $t = \frac{x_1}{v_0 \cos \alpha}$ , d'où :

$$z_1 = \frac{-g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x_1^2 + x_1 \tan \alpha \quad (1)$$

2. Lorsque l'obus arrive au sol  $z_1 = 0$  et la portée  $P$  est donnée par la valeur de  $x_1$  déduite de (??) :

$$P = \frac{\tan \alpha 2v_0^2 \cos^2 \alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$$

L'altitude maximale s'obtient pour  $z_1 = 0$  soit  $t = v_0 \sin \alpha / g$ . On a ainsi :

$$z_{\max} = -\frac{g}{2} \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{g^2} + \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{g} \text{ d'où}$$

$$z_{\max} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}$$

3. L'application numérique conduit à :  $P = 56,5 \text{ km}$  et  $z_{\max} = 8,2 \text{ km}$ .

4. Dans le repère  $\mathcal{R}_T$  le vecteur rotation de la Terre vaut :

$$\vec{\omega} = \omega \sin \lambda \vec{z}_1 - \omega \cos \lambda \vec{y}_1$$

5. La force de CORIOLIS a pour expression :

$$\vec{F}_C = -2m\vec{\omega} \wedge \vec{v}_{\mathcal{R}_T}$$

Après calcul, on obtient :

$$\begin{cases} F_{Cx_1} = 2m\omega \cos \lambda \dot{z} + 2m\omega \sin \lambda \dot{y} \\ F_{Cy_1} = -2m\omega \sin \lambda \dot{x} \\ F_{Cz_1} = -2m\omega \cos \lambda \dot{x} \end{cases} \quad (2)$$

6. La RFD donne après projection sur les axes et simplification par  $m$  :

$$\begin{cases} \ddot{x} = 2\omega \cos \lambda \dot{z} + 2\omega \sin \lambda \dot{y} \\ \ddot{y} = -2\omega \sin \lambda \dot{x} \\ \ddot{z} = -2\omega \cos \lambda \dot{x} - g \end{cases}$$

7. Après intégration par rapport au temps, on obtient :

$$\begin{cases} \dot{y} = -2\omega \sin \lambda x \\ \dot{z} = -2\omega \cos \lambda x - gt + v_0 \sin \alpha \end{cases}$$

8. En reportant les expressions précédentes dans l'équation de  $\ddot{x}$ , on aboutit à :

$$\begin{aligned} \ddot{x} = & -4\omega^2 \sin^2 \lambda x - 4\omega^2 \cos^2 \lambda x \\ & - 2\omega \cos \lambda g t + 2\omega \cos \lambda \sin \alpha v_0 \end{aligned}$$

soit en négligeant le terme en  $\omega^2$  :

$$\ddot{x} \simeq -2\omega \cos \lambda g t + 2\omega \cos \lambda \sin \alpha v_0$$

9. Les intégrations successives de l'équation en  $\ddot{x}$  donnent :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\omega \cos \lambda g t^2 + 2\omega v_0 \cos \lambda \sin \alpha t + v_0 \cos \alpha \\ x &= -\omega \cos \lambda g \frac{t^3}{3} + \omega v_0 \cos \lambda \sin \alpha t^2 + v_0 \cos \alpha t \end{aligned}$$

10. On reporte l'expression de  $x$  dans  $\dot{y}$  et  $\dot{z}$  en ne tenant pas compte des termes en  $\omega^2$ . Il vient :

$$\begin{cases} \dot{y} = -2\omega v_0 \sin \lambda \cos \alpha t \\ \dot{z} = -2\omega v_0 \cos \alpha \cos \lambda t - gt + v_0 \sin \alpha \end{cases}$$

soit après intégration :

$$\begin{cases} y = -\omega v_0 \sin \lambda \cos \alpha t^2 \\ z = -\omega v_0 \cos \alpha \cos \lambda t^2 - g \frac{t^2}{2} + v_0 \sin \alpha t \end{cases}$$

11. Le point retombe pour  $z = 0$ , ce qui conduit à une valeur  $t_2$  du temps de chute vérifiant :

$$\left( \frac{g}{2} + \omega v_0 \cos \alpha \cos \lambda \right) t_2 = v_0 \sin \alpha$$

$$\text{d'où : } t_2 = \frac{v_0 \sin \alpha}{\frac{g}{2} + \omega v_0 \cos \alpha \cos \lambda}$$

12. L'application numérique donne  $t_2 = 81 \text{ s}$ . En reportant cette valeur dans l'expression de  $x$ , on en déduit la portée suivant l'axe  $\vec{x}$  :

$$P_x = -\omega \cos \lambda g \frac{t_2^3}{3} + \omega v_0 \cos \lambda \sin \alpha t_2^2 + v_0 \cos \alpha t_2$$

Numériquement :  $P_x = 56,2 \text{ km}$ .

La portée a diminué par rapport au calcul précédent de  $\simeq 400 \text{ m}$ .

13. Le même raisonnement donne la portée sur l'axe  $\vec{y}$  :

$$P_y = -\omega v_0 \sin \lambda \cos \alpha t_2^2 = -230 \text{ m}$$

La déviation se fait vers le nord, ce qui est conforme à un déplacement vers la droite sous l'effet de la force de CORIOLIS dans l'hémisphère nord.

## Problème 2

1. Le théorème du moment cinétique (TMC) appliqué à la particule  $\alpha$  placée en M dans le référentiel galiléen du laboratoire s'écrit :

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{OM} \wedge \frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0 \|\vec{OM}\|^3} \vec{OM} = \vec{0}$$

On en déduit que le moment cinétique en O de la particule  $\alpha$ ,  $\vec{L}_O$ , est constant.

A  $t = 0$  on a :

$$\begin{aligned} \vec{L}_O(t=0) &= \vec{OM}(t=0) \wedge m\vec{v}(t=0) \\ &= (X\vec{e}_x + b\vec{e}_y) \wedge mv_0\vec{e}_x \\ &= -bm v_0 \vec{e}_z \end{aligned}$$

Par ailleurs à un instant  $t$  quelconque,

$$\begin{aligned}\vec{L}_O(t=0) &= \vec{OM}(t=0) \wedge m\vec{v}(t=0) \\ &= r\vec{e}_r \wedge r\dot{\theta}\vec{e}_\theta \\ &= mr^2\dot{\theta}\vec{e}_z\end{aligned}$$

Le mouvement est plan car le vecteur  $\vec{OM}$  est en permanence perpendiculaire au moment cinétique  $\vec{L}_O = \vec{OM} \wedge m\vec{v}$  qui est vecteur constant. Le plan du mouvement est le plan passant par O perpendiculaire à  $\vec{L}_O$ .

**2.** La force de répulsion entre les deux charges s'écrit :

$$\vec{F} = \frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$$

Elle dérive de l'énergie potentielle  $E_p$  telle que :

$$\begin{aligned}dE_p &= -\vec{F} \cdot d\vec{M} = -\vec{F} \cdot (dr\vec{e}_r + r\vec{d}\vec{r}) \\ &= -\frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr \\ &= d\left(\frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r}\right)\end{aligned}$$

On en déduit par intégration (avec  $E_p = 0$  pour  $r \rightarrow \infty$ )

$$E_p = \frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

**3.** Dans le référentiel du laboratoire, le noyau a une énergie cinétique nulle, celle de la particule  $\alpha$  vaut  $E_c = \frac{1}{2}mv^2$ . L'énergie mécanique du système particule  $\alpha$  – noyau d'or est donc :

$$E_m = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

Comme la seule force à agir est conservative, l'énergie mécanique du système est constante.

La vitesse de la particule  $\alpha$  vérifie

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2$$

On a ainsi

$$\begin{aligned}E_m &= \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 + \frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} \\ &= \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\frac{L_O^2}{mr^2} + \frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} \\ &= \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + E_{peff}\end{aligned}$$

où  $E_{peff}$  désigne l'énergie potentielle effective

**4.** Au départ, on a  $E_p \rightarrow 0$  et l'énergie mécanique vaut

$$E_m = \frac{1}{2}mv_0^2$$

Quand la particule s'est à nouveau éloignée, on a  $E_p \rightarrow 0$  et

$$E_m = \frac{1}{2}mv_\infty^2$$

Comme l'énergie mécanique est constante  $v_\infty = v_0$

**5.** Au moment de la plus courte approche de la particule  $\alpha$ ,  $\dot{r} = 0$ , l'énergie potentielle effective vaut alors

$$E_{peff} = E_m = \frac{1}{2}mv_0^2$$

On obtient ainsi

$$\frac{1}{2}\frac{(mv_0b)^2}{mr_{\min}^2} + \frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r_{\min}} = \frac{1}{2}mv_0^2$$

Il s'agit d'une équation du second degré en  $1/r_{\min}$  dont la seule solution positive est pour  $b \neq 0$  :

$$\begin{aligned}\frac{1}{r_{\min}} &= -\frac{1}{mv_0^2 b^4} \frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0} + \\ &\frac{1}{mv_0^2 b^4} \sqrt{\left(\frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0}\right)^2 - m^2 v_0^4 b^4}\end{aligned}$$

**6.** Lorsque  $b = 0$  l'équation se réduit à

$$\frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r_{\min}} = \frac{1}{2}mv_0^2$$

qui correspond à la transformation de toute l'énergie cinétique en énergie potentielle au point de rebroussement en  $r_{\min}$ . On en déduit

$$r_{\min} = \frac{2}{mv_0^2} \frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0}$$

Numériquement on obtient  $r_{\min} = 3,8 \cdot 10^{-14} \text{ m}$ . RUTHERFORD a ainsi donné la première estimation de dimension pour le noyau atomique.

7. Loin du noyau, la particule  $\alpha$  est isolée, elle a un mouvement rectiligne uniforme à la vitesse  $v_0$ . On sait que les trajectoire des points soumis à des forces centrales newtonniennes sont des coniques. La seule conique ayant des asymptote est l'hyperbole. On en déduit que la trajectoire est une branche d'hyperbole.

8. La RFD s'écrit :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$$

En projection sur  $(Ox)$  on obtient

$$m \frac{dv_x}{dt} = \frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cos\theta$$

La conservation du moment cinétique permet d'écrire

$$mr^2\dot{\theta} = -mbv_0$$

d'où on peut tirer

$$\frac{1}{r^2} = -\frac{\dot{\theta}}{bv_0}$$

On reporte cette expression dans la projection de la RFD que l'on intègre, il vient :

$$\int_0^\infty m \frac{dv_x}{dt} dt = \int_0^\infty -\frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0} \dot{\theta} \cos\theta dt$$

qui s'intègre en

$$[mv_x]_0^\infty = \left[ -\frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0} \sin\theta(t) \right]_0^\infty$$

soit

$$mv_0 \cos D - mv_0 = -\frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0} \sin D$$

En utilisant

$$\begin{aligned} \cos D - 1 &= -2 \sin^2 \frac{D}{2} \\ \sin D &= 2 \cos \frac{D}{2} \sin \frac{D}{2} \end{aligned}$$

on obtient

$$2mv_0 \sin \frac{D}{2} = \frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0} 2 \cos \frac{D}{2}$$

Finalement, on en déduit la relation cherchée

$$\tan\left(\frac{D}{2}\right) = \frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0 m v_0^2 b}$$

9. On travaille pour cela dans le référentiel barycentrique qui est galiléen car le système est isolé. Le repère choisi a pour origine G. La particule  $\alpha$  se trouve en  $M_\alpha$  et le noyau d'or en  $M_{\text{or}}$ .

On introduit un point M tel que

$$\overrightarrow{GM} = \overrightarrow{M_{\text{or}}M_\alpha} = \overrightarrow{GM_\alpha} - \overrightarrow{GM_{\text{or}}}$$

En combinant cette équation et la définition du barycentre

$$m_\alpha \overrightarrow{GM_\alpha} + m_{\text{or}} \overrightarrow{GM_{\text{or}}} = \vec{0}$$

on obtient

$$\overrightarrow{GM_\alpha} = \frac{m_{\text{or}}}{m_{\text{or}} + m_\alpha} \overrightarrow{GM}$$

La RFD appliquée à la particule  $\alpha$  dans le référentiel barycentrique s'écrit :

$$m_\alpha \frac{d\overrightarrow{GM_\alpha}}{dt} = \frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\overrightarrow{M_{\text{or}}M_\alpha}}{\|\overrightarrow{M_{\text{or}}M_\alpha}\|^3}$$

ce qui se transforme à partir de l'expression précédente de  $\overrightarrow{GM_\alpha}$  en

$$\frac{m_{\text{or}} m_\alpha}{m_{\text{or}} + m_\alpha} \frac{d\overrightarrow{GM}}{dt} = \frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\overrightarrow{GM}}{\|\overrightarrow{GM}\|^3}$$

Tout se passe comme si une particule fictive de masse  $\frac{m_{\text{or}} m_\alpha}{m_{\text{or}} + m_\alpha}$  et de charge  $2e$  placée en M subissait la force d'une charge  $Ze$  placée en G. On se retrouve donc dans la situation traitée précédemment en remplaçant O par G et  $m_\alpha$  par  $\frac{m_{\text{or}} m_\alpha}{m_{\text{or}} + m_\alpha}$ .

Pour trouver la trajectoire de  $M_\alpha$ , il suffit de reprendre la relation

$$\overrightarrow{GM_\alpha} = \frac{m_{\text{or}}}{m_{\text{or}} + m_\alpha} \overrightarrow{GM}$$

qui montre que cette trajectoire se déduit de celle de M par homothétie.

# Problème 3

Petites Mines 2002 commun

**A-1** Le mobile est soumis au poids, à la réaction du plan horizontal et à la tension du ressort. La projection de la relation fondamentale de la dynamique (RFD) sur la verticale montre que les deux premières forces se neutralisent. La force totale est donc la tension du ressort, dont le support passe par O et dont le moment en O est nul. D'après le théorème du moment cinétique (TMC), le moment cinétique en O reste donc constant au cours du mouvement.

**A-2-1** Calculé à l'instant  $t = 0$ , le moment cinétique est nul ; donc  $mr^2\dot{\theta} = 0$ , ce qui montre que  $\theta$  est constant et que le mouvement a lieu sur l'axe Ox.

**A-2-2** La RFD s'écrit en projection sur Ox

$$m\ddot{\ell} = -k(\ell - \ell_0)$$

La solution, compte tenu des conditions initiales,  $\ell(0) = 1,2\ell_0$  et  $\dot{\ell}(0) = 0$  est :

$$\ell = \ell_0 \left[ 1 + 0,2 \cos \sqrt{\frac{k}{m}} t \right]$$

$\ell$  évolue ainsi entre  $0,8\ell_0$  et  $1,2\ell_0$ .

**A-3-1** . Le moment cinétique est égal à :

$$\begin{aligned} \vec{L}_O &= \vec{OM} \wedge m\vec{v} \\ &= mr^2\dot{\theta}\vec{k} \\ &= m\ell_1^2\omega\vec{k} \end{aligned}$$

**A-3-2** L'énergie potentielle élastique est égale à :

$$E_p = \frac{1}{2}k(r - \ell_0)^2$$

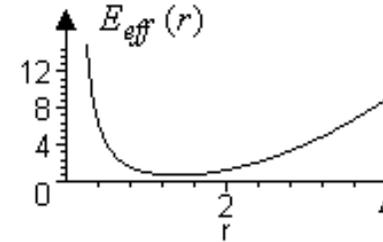
Le mouvement étant horizontal, il ne faut pas tenir compte des forces verticales comme le poids. Comme il existe une énergie potentielle associée à la force totale, il y a conservation de l'énergie :

$$\begin{aligned} E_m &= \frac{1}{2}mv^2 + E_p \\ &= \frac{1}{2}m\ell_1^2\omega^2 + \frac{1}{2}k(\ell_1 - \ell_0)^2 \\ &= \frac{1}{2}m[\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2] + \frac{1}{2}k(r - \ell_0)^2 \end{aligned}$$

**A-3-3** D'après **A-3-1**,  $\dot{\theta} = \frac{\omega\ell_1^2}{r^2}$ , donc  $E_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + E_{\text{eff}}(r)$  où

$$E_{\text{eff}}(r) = \frac{m\ell_1^2\omega^2}{2r^2} + \frac{1}{2}k(r - \ell_0)^2$$

dont le graphe est tracé ci-dessous.



**A-3-4**  $\frac{1}{2}m\dot{r}^2$  étant positif ou nul, seule est accessible la région où  $E_{\text{eff}}(r) \leq E_m$ . Le mobile ne peut s'éloigner indéfiniment, car  $\lim_{r \rightarrow +\infty} E_{\text{eff}}(r) = +\infty$ .

**A-3-5** Comme  $\dot{\theta} = \frac{\omega\ell_1^2}{r^2}$ , la vitesse ne peut s'annuler au cours du mouvement si  $\omega \neq 0$ .

**A-3-6** Le mobile ne peut passer par O, car  $\lim_{r \rightarrow 0} E_{\text{eff}}(r) = +\infty$ .

**A-4-1** Comme  $\dot{\theta} = \frac{\omega\ell_1^2}{r^2}$ ,  $\dot{\theta} = \omega$  : le mouvement est uniforme.

**A-4-2** Lorsqu'on dérive l'expression de l'énergie mécanique par rapport au temps on obtient  $m\ddot{r} = -\frac{dE_{\text{eff}}}{dr}$ . Pour  $r = \ell_1 = \text{const}$  on a donc  $m\ddot{r} = 0 = -\frac{dE_{\text{eff}}}{dr}(r = \ell_1)$ . D'où

$$-\frac{m\ell_1^4\omega^2}{r^3} + k(r - \ell_0) = 0 \text{ soit } r = \ell_1 = \frac{\ell_0}{1 - \frac{m\omega^2}{k}}, \text{ qui exige } \ell_1 > 0, \text{ soit } \boxed{\omega < \sqrt{\frac{k}{m}}}.$$

**B-1** Les forces d'inertie sont égales à :

$$\begin{aligned} \vec{f}_{ie} &= m\omega^2 r \vec{e}_r \\ \vec{f}_{ic} &= -2m\vec{\Omega} \wedge \vec{r} \vec{e}_r = -2m\omega r \vec{e}_\theta \end{aligned}$$

**B-2** Une force  $\vec{F}$  appliquée à un mobile ponctuel dérive d'une énergie potentielle  $E_p$  si le travail de la force vérifie  $\delta W = \vec{F} \cdot d\vec{r} = -dE_p$  pour tout déplacement.

La force d'inertie d'entraînement  $\vec{f}_{ie}$  dérive de l'énergie potentielle

$$E_{pfie} = -\frac{1}{2}m\omega^2 r^2$$

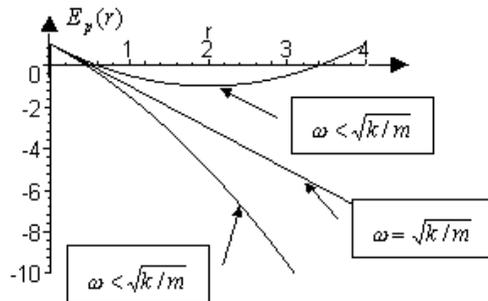
**B-3** La force de CORIOLIS ne dérive pas d'une énergie potentielle, car il n'existe pas de fonction de la position dont elle soit le gradient, étant donné qu'elle dépend de la vitesse. Par contre on pourrait associer à cette force une énergie potentielle

constante, car le travail de cette force est toujours nul, donc égal à la variation de cette énergie potentielle constante.

**B-4** La force totale est la somme des quatre forces suivantes : la tension du ressort, la force d'inertie d'entraînement, la force d'inertie de CORIOLIS et la réaction de l'axe  $(O, \vec{e}_r)$ . Les deux premières forces dérivent d'une énergie potentielle et les deux dernières ont un travail nul. On peut donc associer à la force totale l'énergie potentielle

$$E_p(r) = \frac{1}{2}k(r - \ell_0)^2 - \frac{1}{2}m\omega^2 r^2$$

Les différentes formes possibles du graphe de  $E_p(r)$ , qui sont des paraboles d'axe vertical, sont représentées ci-dessous.



**B-5** La position d'équilibre correspond à  $\vec{F} = 0$  soit :

$$F = -\frac{dE_p}{dr} = -k(r - \ell_0) + m\omega^2 r = 0$$

donc pour la distance  $r = \ell_2$  telle que

$$\ell_2 = \frac{\ell_0}{1 - \frac{m\omega^2}{k}}$$

qui existe si  $\omega < \sqrt{\frac{k}{m}}$ .

**B-6**  $\ell_1 = \ell_2$ ; la condition d'existence est la même. La liaison sur l'axe  $(O, \vec{e}_r)$  est inutile pour le mouvement circulaire.