

DS 8 le 14 mai 2012
ÉLECTROMAGNÉTISME – THERMODYNAMIQUE

NB : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées.

Toute application numérique ne comportant pas d'unité ne donnera pas lieu à attribution de points.

Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Question de cours 1

1. Calculer le champ magnétique sur l'axe d'un solénoïde infini de section circulaire de rayon R contenant n spires par unité de longueur parcourues par un courant d'intensité I .
2. Calculer le champ magnétique en tout point de l'espace.
3. On considère un proton placé à l'instant $t = 0$ sur l'axe du solénoïde avec un vecteur vitesse $\vec{v}_0$ perpendiculaire à l'axe. Décrire son mouvement. A quelle condition le proton reste-t-il dans le solénoïde ?

Problème 1

L'air atmosphérique est considéré comme un gaz parfait de masse molaire $M_a = 29 \text{ g.mol}^{-1}$. On prend l'axe Oz vertical ascendant. Son origine est prise au niveau du sol.

On donne la constante des gaz parfaits $R = 8,314 \text{ J.K}^{-1}$ et $g = 10 \text{ m.s}^{-2}$.

Au niveau du sol, la température de l'air est $T_0 = 290 \text{ K}$, sa pression est $P_0 = 1 \text{ bar}$, sa masse volumique est $\mu_0 = 1,3 \text{ g.L}^{-1}$.

1. Selon le modèle standard, on admet que dans la troposphère, partie de l'atmosphère comprise entre 0 et 11 km, la température vérifie la relation :

$$T(z) = T_0 [1 - az] \text{ avec } a = 22,5.10^{-6} \text{ m}^{-1}$$

Montrer que $P = P_0(1 - az)^\alpha$ où $\alpha = \frac{gM_a}{RaT_0}$.

2. Quelle est l'expression de $\mu(z)$, masse volumique de l'air à l'altitude z ?

3. Un ballon, de volume maximal $V_{\max} = 1000 \text{ m}^3$, est partiellement gonflé au sol avec un volume $V_0 = 500 \text{ m}^3$ d'hélium. La masse totale de l'enveloppe et de la nacelle est $m = 500 \text{ kg}$.

L'enveloppe est munie d'une soupape qui assure l'équilibre mécanique et thermique entre l'hélium et l'air extérieur.

3.1. Montrer que la densité de l'hélium par rapport à l'air : $d = \mu_{\text{He}}/\mu_a$ est constante lors de l'ascension. On donne la masse molaire de l'hélium : $M_{\text{He}} = 4 \text{ g.mol}^{-1}$. Calculer d .

3.2. On appelle force ascensionnelle la somme des forces extérieures s'exerçant sur le ballon, en mouvement rectiligne le long de l'axe Oz .

Déterminer l'expression de cette force au sol, en fonction de m , g , d , μ_0 et V_0 .

3.3. A quelle condition le ballon s'élève-t-il ?

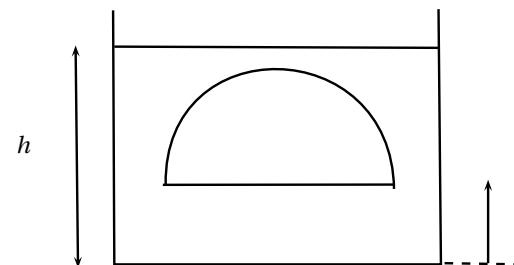
Exprimer le volume $V(z)$ au cours de l'ascension tant que $V(z) < V_{\max}$.

Calculer l'altitude maximale, $z_{\max}$, lorsque le volume atteint sa valeur maximale.

Quel est le rôle de la soupape ?

Problème 2

On considère une demi-boule pleine de rayon R plongée dans un liquide de masse volumique ρ . On note h la hauteur de liquide et z l'altitude de la demi-boule dans le récipient. La pression atmosphérique sera notée P_0 .

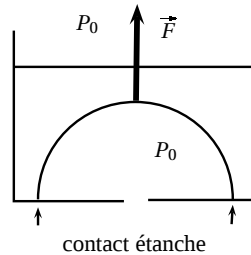


1 - Donner l'expression de la force $\vec{F}_1$ exercée par le fluide sur la face plate de la demi-boule.

2 - Donner l'expression de la force $\vec{F}_2$ exercée par le fluide sur la partie de la surface de forme sphérique de la demi-boule.

3 - Quelle est la poussée d'ARCHIMÈDE $\vec{\Pi}$ subie par la demi-boule ? Montrer que $\vec{\Pi} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$. Aurait-on pu prévoir ce résultat ?

On considère maintenant une demi-sphère de masse M , de rayon R qui repose sur le fond plat d'un récipient percé en son centre. Le contact est parfaitement étanche et le récipient est rempli d'un liquide de masse volumique ρ sur une hauteur $h > R$.



4 - Quelles sont les forces qui s'exercent sur la demi-sphère ? Aucun calcul n'est demandé pour cette question.

5 - Quelle force $\vec{F}$ faut-il exercer pour soulever la demi-sphère ? On pourra exploiter les calculs des questions 1 à 3.

Problème 3

Données et notations :

Les températures T sont en Kelvin, θ en degrés Celsius.

- Température de fusion de l'eau pure : 0°C ou $273,2\text{ K}$.

- Rapport des coefficients thermiques molaires, respectivement isobare et isochore, pour un gaz diatomique, constant dans le régime de température considéré : $\gamma = C_{p,m}/C_{v,m} = 7/5 = 1,40$.

- Constante des gaz parfaits : $R = 8,31\text{ J}\cdot\text{mol}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$.

- $1\text{ bar} = 10^5\text{ Pa}$.

- Intensité du champ de pesanteur : $g = 9,81\text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$.

1 - Détente simple

Le diazote est assimilé à un gaz parfait diatomique.

1.1 Donner la relation entre pression P , volume V et température T d'une mole de diazote N_2 (équation d'état).

1.2 Que vaut la variation d'énergie interne $\Delta U_{0^\circ\text{C} \rightarrow 25^\circ\text{C}}$ d'une mole de N_2 entre 0°C et 25°C ?

1.3 Une mole de N_2 préalablement comprimée à la pression de 50 bars, et à la température $\theta_i = 25^\circ\text{C}$, subit une détente adiabatique, brutale et irréversible. La détente s'effectue contre une pression extérieure constante $P_e = 1\text{ bar}$. En fin de détente, la pression du gaz est de $P_e = 1\text{ bar}$. Calculer la température θ_f du gaz en fin de détente, en degrés Celsius et en Kelvin.

1.4 Comparer la température obtenue à la température θ'_f que l'on aurait obtenue après une détente adiabatique réversible ou quasi-statique de 50 à 1 bar.

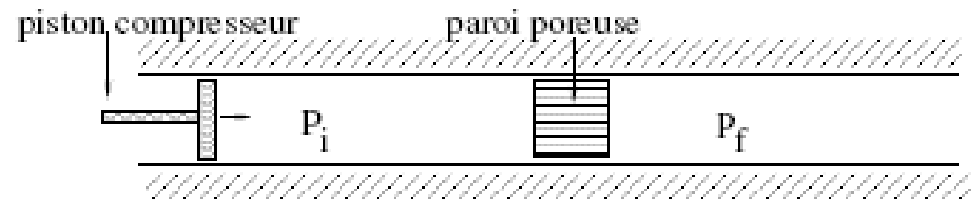
2 - Détente de JOULE-THOMSON

Un gaz parfait s'écoule à débit massique constant à travers une paroi poreuse, et sa pression chute d'une valeur P_i en amont, à une valeur P_f en aval de la paroi poreuse (voir Figure). Le tube dans lequel s'effectue la détente est calorifugé, de sorte que les échanges d'énergie thermique avec l'environnement sont négligeables.

2.1 Définir l'enthalpie H d'une mole de gaz diatomique et exprimer sa valeur en fonction de R et T .

2.2 Montrer que la détente de JOULE-THOMSON est isenthalpique, c'est-à-dire que l'enthalpie d'une masse donnée de gaz ne change pas après avoir traversé la paroi poreuse. On se place en régime permanent, avec un débit massique constant.

2.3 Comment évolue la température du gaz qui se détend ?



3 - Fluide de VAN DER WAALS

Une mole de fluide de VAN DER WAALS monoatomique est caractérisée par une équation d'état :

$$\left(P + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = RT$$

tandis que son énergie interne est :

$$U = \frac{3}{2}RT - \frac{a}{V}$$

avec V volume, P pression, T température, R constante des gaz parfaits.

3.1 Interpréter physiquement les paramètres a et b . Déterminer l'enthalpie $H(V, T)$ fonction du volume et de la température.

3.2 Une transformation élémentaire $V \rightarrow V + dV$, $T \rightarrow T + dT$ se fait à enthalpie constante. Calculer le rapport dT/dV en fonction des dérivées partielles de $H(V, T)$.

Montrer que :

$$\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_H = -\frac{\left(\frac{\partial H}{\partial V}\right)_T}{\left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_V} \quad (1)$$

Exprimer le résultat pour le gaz de VAN DER WAALS.

3.3 Pour décrire la détente de JOULE-THOMSON, il faut déterminer la dérivée $\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_H$, qui découle de l'expression de $H(P, T)$, enthalpie fonction de la pression et de la température. On admet la relation :

$$\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_H = \frac{-\left(\frac{\partial H}{\partial V}\right)_T \left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T}{\left(\frac{\partial H}{\partial V}\right)_T \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P + \left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_V}$$

Rappeler la définition du coefficient de compressibilité isotherme χ_T d'un gaz. En déduire le signe de $\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T$.

On ne demande pas de calculer $\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T$.

En admettant que le dénominateur de l'expression ci-dessus reste positif, montrer que pour un volume donné, il existe une température $T_{\text{inv}}(V)$ pour laquelle $\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_H$ s'annule en changeant de signe.

Calculer cette température d'inversion $T_{\text{inv}}(V)$. En déduire que pour $T < T_{\text{inv}}(V)$ la détente de JOULE-THOMSON s'accompagne d'un abaissement de la température.

3.4 Application : calculer la température d'inversion $T_{\text{inv He}}$ pour le modèle de VAN DER WAALS de l'hélium :

$a = 3,46 \cdot 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{m}^6 \cdot \text{mol}^{-2}$, $b = 2,38 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3 \cdot \text{mol}^{-1}$, $V = 2,90 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 \cdot \text{mol}^{-1}$.

La valeur expérimentale est de l'ordre de 40 K. Cet effet est mis à profit dans les procédés de liquéfaction des gaz (hélium liquide).

Commentaires et correction :

Questions de cours

Cette question demandait de faire un calcul du champ créé par une spire en un point de son axe, par un solénoïde en un point de son axe par intégration. L'étude des symétries ne fait pas intervenir les invariances. D'ailleurs pour un point de l'axe les vecteurs $\vec{e}_r$ et $\vec{e}_\theta$ ne sont pas définis, de même que la valeur de θ . Il n'y avait qu'à faire intervenir les plans Π^+ passant par l'axe.

Ensuite, on applique le théorème d'Ampère pour calculer le champ en tout point à l'extérieur et à l'intérieur du solénoïde. Pour cela, il faut faire l'étude des symétries, qui est différente de celle faite sur l'axe : il y a les invariances par rotation et translation et on utilise le plan perpendiculaire à l'axe.

Pour ce calcul, on utilise un contour d'AMPÈRE rectangulaire placé dans un plan radial ($\theta_M = \theta_N$). On peut même prendre un cadre passant par l'axe du solénoïde car on y connaît le champ d'après l'étude précédente.

Pour le mouvement du proton, c'est du cours pur qui devrait être connu de tout le monde.

Problème 1

Le premier calcul se faisait en suivant la démonstration du cours pour l'atmosphère isotherme, mais ici T variait de façon linéaire avec l'altitude.

Peu de réussite sur le calcul de la force ascensionnelle. Le système à étudier est le ballon et l'hélium qu'il contient. Il fallait donc faire entrer le poids de l'hélium qui n'a rien de négligeable.

Problème 2

Le calcul de la force de pression exercée par l'eau sur la demi-sphère n'a été réussi par personne. C'est donc à étudier pour tout le monde. Le principe est le même que pour le barrage hemi-cylindrique vu en TD.

La poussée d'ARCHIMÈDE correspond à la résultante des forces de pression exercées sur un fluide totalement immergé. Il est donc normal qu'on retrouve le même résultat que lorsque l'on calcule les forces sur les différentes faces de la demi-sphère.

En revanche, on ne peut pas utiliser la poussée d'ARCHIMÈDE lorsque la demi-sphère repose sur un support. Elle n'est plus totalement immergée.

Problème 3

Pour le calcul de la capacité thermique du gaz parfait, il fallait utiliser la valeur de γ proposée dans le sujet et non pas écrire directement sans explication $C_v = \frac{5}{2}R$. Il faut toujours penser à répondre dans l'esprit du sujet.

Le calcul de la température finale du gaz parfait après une détente adiabatique réversible se fait avec la formule de LAPLACE.

La démonstration de la détente de JOULE KELVIN n'est pas assez bien connue. Certains ont voulu trop résumer et ce qui est fait n'a plus de sens. Penser bien qu'on raisonne en grandeur massique, il faut donc utiliser des petites lettres.

Problème 1

G2E 2006

1. Dans le cas d'un axe vertical ascendant, l'équation locale de la statique des fluides s'écrit :

$$\frac{dP}{dz} = -\mu_{\text{air}} g$$

Le champ de pesanteur est uniforme, mais le fluide n'est pas incompressible.

$$\frac{dP}{dz} = -\frac{M_a P}{RT} g$$

soit

$$\frac{dP}{P} = -\frac{M_a g}{RT_0} \frac{dz}{1 - az}$$

Par intégration,

$$[\ln P]_{P_0}^{P(z)} = -\frac{M_a g}{RT_0} \left[-\frac{1}{a} \ln(1 - az) \right]_0^z$$

Avec $\alpha = \frac{g M_a}{R a T_0}$, on a donc

$$\ln \left(\frac{P(z)}{P_0} \right) = \alpha \ln(1 - az)$$

Finalement $P(z) = P_0(1 - az)^\alpha$

2. La masse volumique de l'air est donnée par :

$$\begin{aligned} \mu(z) &= \frac{M_a P}{RT} = \frac{M_a P_0(1 - az)^\alpha}{RT_0(1 - az)} \\ &= \frac{M_a P_0}{RT_0} (1 - az)^{\alpha-1} \end{aligned}$$

Finalement $\mu(z) = \mu_0(1 - az)^{\alpha-1}$

avec $\alpha = \frac{g M_a}{R a T_0} = 5,35$

3.1. Par construction, l'hélium et l'air atmosphérique sont à la même pression tant que l'enveloppe du ballon reste inférieure à $V_{\max}$. La densité de l'hélium est constante et égale à :

$$d = \frac{\mu_{\text{He}}}{\mu_{\text{air}}} = \frac{\frac{M_{\text{He}}P}{RT}}{\frac{M_aP}{RT}}$$

$$\text{d'où } d = \frac{M_{\text{He}}}{M_a}$$

L'application numérique donne

$$d = 0,14$$

3.2. Le système considéré est le ballon, son enveloppe, la nacelle et la masse d'hélium contenu dans l'enveloppe. Un bilan de forces sur le ballon montre qu'il est soumis à son poids et à la résultante des forces de pression que l'on appelle la poussée d'ARCHIMÈDE. La force ascensionnelle est la résultante des forces extérieures.

$$\begin{aligned}\vec{F}_{\text{asc}}(z=0) &= \vec{P} + \vec{\Pi}_A \\ &= (-mg - m_{\text{He}}g + m_{\text{air}}g)\vec{u}_z\end{aligned}$$

On obtient ainsi

$$\vec{F}_{\text{asc}}(z=0) = [\mu_0 V_0 (1-d) - m] g \vec{u}_z$$

3.3. Le ballon s'élève si la force ascensionnelle est dirigée vers le haut. Pour l'altitude $z=0$, l'application numérique donne : $F_{\text{asc}} = 603 \text{ N}$ dirigée vers le haut. Le volume vaut :

$$\begin{aligned}V(z) &= \frac{m_{\text{He}}}{\mu_{\text{He}}(z)} \\ &= \frac{d\mu_0 V_0}{d\mu_{\text{air}}(z)} = \frac{\mu_0 V_0}{(1-az)^{\alpha-1}}\end{aligned}$$

soit finalement $V(z) = V_0(1-az)^{1-\alpha}$

L'altitude $z_{\max}$ est donnée par l'expression suivante

$$z_{\max} = \frac{1}{a} \left[1 - \left(\frac{V_{\max}}{V_0} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \right]$$

Numériquement $z_{\max} = 6,5.10^3 \text{ m}$

Au-delà de l'altitude $z_{\max}$, l'hélium ne peut plus augmenter de volume alors que le ballon continue son ascension. Il va donc y avoir une surpression dans l'enveloppe qui risque de se déchirer. La soupape permet d'éviter ce problème en libérant un peu de gaz.

Problème 2

1 - La pression dans le liquide est donnée par la relation :

$$P(z) = P_0 + \rho g(h-z)$$

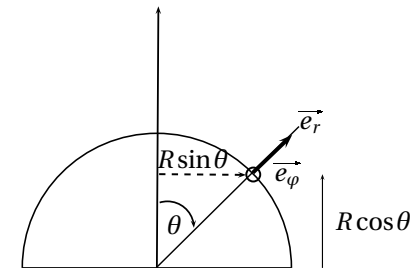
La force $\vec{F}_1$ qui s'exerce sur la face inférieure se calcule simplement :

$$\vec{F}_1 = \int \int_{\text{face plate}} P(z) dS \vec{e}_z = P(z) \pi R^2 \vec{e}_z$$

2 - Pour la partie de forme sphérique, le calcul est plus complexe. On travaille en coordonnées sphériques :

$$\vec{F}_2 = - \int \int P dS \vec{e}_r$$

La symétrie impose que la force est selon $-\vec{e}_z$. On additionne donc les composantes suivant cette direction de toutes les forces s'exerçant sur les petits éléments de surface.



La composante suivant $\vec{e}_z$ de $\vec{F}_2$ vaut :

$$\begin{aligned}F_{2z} &= - \int \int P dS \vec{e}_r \cdot \vec{e}_z \\ &= - \int_{\theta=0}^{\pi/2} \int_{\varphi=0}^{2\pi} P R \sin \theta d\varphi R d\theta \cos \theta\end{aligned}$$

où P est donnée par

$$P = P(z) - \rho g R \cos \theta$$

Pour l'intégration z est constant et repère la position du solide. Le problème se divise donc en deux calculs d'intégrale :

$$F_{2z} = - \int_{\theta=0}^{\pi/2} \int_{\varphi=0}^{2\pi} P(z) R^2 \sin \theta d\varphi d\theta \cos \theta \\ + \int_{\theta=0}^{\pi/2} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \rho g R \cos \theta R^2 \sin \theta d\varphi d\theta \cos \theta$$

soit :

$$F_{2z} = -P(z) R^2 \int_{\theta=0}^{\pi/2} \sin \theta \cos \theta d\theta \int_{\varphi=0}^{2\pi} d\varphi \\ + \rho g R^3 \int_{\theta=0}^{\pi/2} \cos^2 \theta \sin \theta d\theta \int_{\varphi=0}^{2\pi} d\varphi$$

ce qui donne

$$F_{2z} = -2\pi P(z) R^2 \left[\frac{\sin^2 \theta}{2} \right]_0^{\pi/2} \\ + 2\pi \rho g R^3 \left[-\frac{\cos^3 \theta}{3} \right]_0^{\pi/2} \\ = -\pi P(z) R^2 + \frac{2}{3} \pi \rho g R^3$$

Finalement :

$$\vec{F}_2 = -\pi P(z) R^2 \vec{e}_z + \frac{2}{3} \pi \rho g R^3 \vec{e}_z$$

3 - La poussée d'ARCHIMÈDE est l'opposée du poids du liquide déplacé, c'est à dire

$$\vec{\Pi}_A = +\rho \frac{1}{2} \left(\frac{4}{3} \pi R^3 \right) g \vec{e}_z$$

On constate que : $\vec{\Pi}_A = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$.

Ce résultat était attendu car la poussée d'ARCHIMÈDE est la résultante des forces de pression dans le cas d'un solide totalement immergé.

4 - Les forces qui s'exercent sur la demi-sphère sont

- son poids $-Mg\vec{e}_z$
- la réaction du support $\vec{R}$
- les forces de pression de l'eau $\vec{F}_{\text{eau}}$ au-dessus et de l'air $\vec{F}_{\text{air}}$ au-dessous

5 - Au moment où la force $\vec{F}$ permet de soulever la demi-sphère $\vec{R} = \vec{0}$ et l'on doit ajouter la force $\vec{F}$ dans le bilan des forces. L'équilibre s'écrit :

$$\vec{F} + \vec{F}_{\text{eau}} + \vec{F}_{\text{air}} - Mg\vec{e}_z = \vec{0} \quad (2)$$

$\vec{F}_{\text{eau}}$ correspond au calcul de la force $\vec{F}_2$ dans le cas $z = 0$ soit :

$$\vec{F}_{\text{eau}} = -\pi (P_0 + \rho g h) R^2 \vec{e}_z + \frac{2}{3} \pi \rho g R^3 \vec{e}_z$$

Le calcul de $\vec{F}_{\text{air}}$ est un calcul similaire à celui de $\vec{F}_2$ mais avec une pression P_0 constante.

$$F_{\text{air}z} = + \int \int P_0 dS \vec{e}_\theta \cdot \vec{e}_z \\ = \int_{\theta=0}^{\pi/2} \int_{\varphi=0}^{2\pi} P_0 \cdot R \sin \theta d\varphi \cdot R d\theta \cdot \cos \theta \\ = 2\pi P_0 R^2 \left[\frac{\sin^2 \theta}{2} \right]_0^{\pi/2}$$

soit

$$\vec{F}_{\text{air}} = P_0 \pi R^2 \vec{e}_z$$

Finalement, on déduit de (??)

$$\vec{F} = \left[Mg + \pi R^2 \rho g h - \frac{2}{3} \pi \rho g R^3 \right] \vec{e}_z$$

Problème 3

CCP PC 2006

1 - Détente simple

1.1 Le diazote étant un gaz parfait (GP), on a

$$PV = nRT$$

1.2 Pour un GP, la variation d'énergie interne élémentaire d'une mole est donné par la loi de JOULE

$$dU = C_{Vm} dT = \frac{R}{\gamma - 1} dT = \frac{5}{2} R dT$$

Par intégration le long de la transformation, la variation d'énergie interne vaut :

$$\Delta U = \frac{5}{2} R \Delta T = \frac{5}{2} 8,31 (25 - 0) = 520 \text{ J}$$

1.3 Ecrivons le premier principe pour la transformation. On a $\Delta U = W + Q$. La transformation étant adiabatique $Q = 0$.

Par ailleurs les seuls travaux à considérer sont les travaux des forces de pression. Comme la transformation est monobare

$$W = \int_I^F P_e dV = -P_e(V_F - V_I) \\ = -P_e \left[\frac{RT_F}{P_e} - \frac{RT_I}{P_I} \right]$$

D'après la première loi de JOULE

$$\Delta U = C_V \Delta T = \frac{R}{\gamma - 1} (T_F - T_I)$$

En combinant ses résultats, on peut réécrire le premier principe sous la forme

$$\frac{R}{\gamma - 1} (T_F - T_I) = -P_e \left[\frac{RT_F}{P_e} - \frac{RT_I}{P_I} \right]$$

d'où on peut extraire

$$T_F = \frac{1 + (\gamma - 1) \frac{P_e}{P_I}}{\gamma} T_I = 215 \text{ K}$$

ce qui correspond à -58 °C.

1.4 D'après la loi de Laplace pour une détente adiabatique d'un GP $PV^\gamma = \text{const}$ soit encore $P \left(\frac{RT}{P} \right)^\gamma = \text{const}$ ce qui conduit à $P^{1-\gamma} T^\gamma = \text{const}$.

On a donc

$$P_I^{1-\gamma} T_I^\gamma = P_e^{1-\gamma} T_F'^\gamma$$

d'où on tire

$$T_F' = \left[\frac{P_e}{P_I} \right]^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = 97 \text{ K}$$

ce qui correspond à -176 °C.

2 - Détente de JOULE-THOMSON

2.1 L'enthalpie d'une mole d'un GP diatomique vaut :

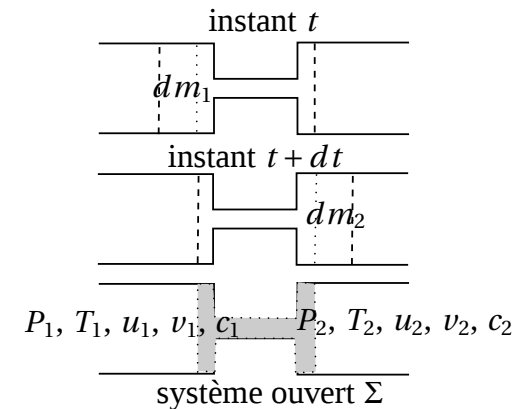
$$H = U + PV = \frac{5R}{2} T + RT = \frac{7R}{2} T$$

2.2 On considère le système fermé S s'écoulant à travers la paroi poreuse entre t et $t + dt$. Il coïncide avec le système ouvert Σ et la masse dm_1 à l'instant t et avec Σ et la masse dm_2 .

Le système fermé a une masse constante

$$dm_1 + M_\Sigma(t) = dm_2 + M_\Sigma(t + dt)$$

En régime stationnaire $M_\Sigma(t) = M_\Sigma(t + dt)$, d'où $dm_1 = dm_2$ qu'on notera simplement dm .



Le travail des forces de pression reçu par le système fermé est

$$\delta W_P = P_1 v_1 dm - P_2 v_2 dm$$

Notons $dE_m(\Sigma)$ et $dU(\Sigma)$ la variation d'énergie mécanique et d'énergie interne du système ouvert Σ pendant dt . Le premier principe appliqué au système fermé pendant s'écrit, avec des notations évidentes :

$$dE_m(\Sigma) + dU(\Sigma) + dm \left(u_2 - u_1 + gz_2 - gz_1 + \frac{c_2^2}{2} - \frac{c_1^2}{2} \right) = \\ P_1 v_1 dm - P_2 v_2 dm + \delta Q$$

En supposant la canalisation horizontale et calorifugée, et l'écoulement du fluide suffisamment lent, on obtient :

$$dm [u_2 + P_2 v_2 - (u_1 + P_1 v_1)] = 0$$

ce qui implique $h_2 - h_1 = 0$. La détente est *isenthalpique*.

2.3 La variation d'enthalpie massique s'écrit d'après la deuxième loi de Joule $h_2 - h_1 = c_p(T_2 - T_1)$. On en déduit que $T_2 = T_1$. La température ne varie pas pour un GP.

3 - Fluide de VAN DER WAALS

3.1 Le paramètre b correspond au volume d'une mole de molécules. Ce volume n'est pas accessible aux molécules dans leur mouvement et est donc retranché au volume V du gaz.

Quand on suppose $b = 0$, on a :

$$P = \frac{RT}{V} - \frac{a}{V^2}$$

La pression est moins forte que celle d'un GP à cause des forces d'attraction de VAN DER WAALS entre les molécules.

3.2 La différentielle de H s'écrit :

$$dH = \left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_V dT + \left(\frac{\partial H}{\partial V}\right)_T dV$$

Lorsque $dH = 0$, on a donc :

$$\frac{dT}{dV} = - \frac{\left(\frac{\partial H}{\partial V}\right)_T}{\left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_V}$$

Par ailleurs, en considérant T comme fonction de V et H , on a :

$$dT = \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_H dV + \left(\frac{\partial T}{\partial H}\right)_V dH$$

soit à H constante ou $dH = 0$:

$$dT = \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_H dV$$

d'où $\frac{dT}{dV} = \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_H$

Finalement, on en déduit :

$$\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_H = - \frac{\left(\frac{\partial H}{\partial V}\right)_T}{\left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_V} \quad (3)$$

Pour le gaz de VAN DER WAALS, on a :

$$\begin{aligned} H &= \frac{3}{2}RT - \frac{a}{V} + PV \\ &= \frac{3}{2}RT - \frac{a}{V} + \left[\frac{RT}{V-b} - \frac{a}{V^2} \right] V \\ &= \frac{3}{2}RT - \frac{2a}{V^2} + \frac{V}{V-b}RT \end{aligned}$$

Appliquée au cas de H la relation (1) conduit donc à :

$$\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_H = \frac{-\frac{2ab}{V^2} + \frac{b}{(V-b)^2}RT}{\frac{3}{2}R + \frac{V}{V-b}R}$$

3.3 Le coefficient de compressibilité isotherme χ_T est défini par :

$$\chi_T = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T$$

χ_T est une grandeur positive, ce qui implique $\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T < 0$.

D'après l'expression suivante dont le dénominateur est positif

$$\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_H = \frac{-\left(\frac{\partial H}{\partial V}\right)_T \left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T}{\left(\frac{\partial H}{\partial V}\right)_T \left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T + \left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_V}$$

on déduit que $\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_H$ est du même signe que $\left(\frac{\partial H}{\partial V}\right)_T$

De l'expression de H on tire :

$$\left(\frac{\partial H}{\partial V}\right)_T = \frac{2ab}{V^2} - \frac{b}{(V-b)^2}RT$$

Par conséquent $\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_H$ et $\left(\frac{\partial H}{\partial V}\right)_T$ s'annulent pour

$$T_{\text{inv}}(V) = \left(1 - \frac{b}{V}\right)^2 \frac{2a}{bR}$$

Lorsque $T < T_{\text{inv}}(V)$, on a $\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_H > 0$ et $\left(\frac{\partial H}{\partial V}\right)_T > 0$. On en déduit que lorsque P diminue (détente), T diminue aussi.

3.4 L'application numérique conduit à $T_{\text{inv}}(V) = 34,4 \text{ K}$ proche des 40 K annoncés.