

**DS 5 le 11 février 2013**  
**CINÉTIQUE CHIMIQUE – ÉLECTRICITÉ – MÉCANIQUE**

**NB :** Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées.

Toute application numérique ne comportant pas d'unité ne donnera pas lieu à attribution de points.

Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

## Problème 1

### Cinétique d'oxydation des ions iodure ( $I^-$ ) par les ions peroxydisulfate ( $S_2O_8^{2-}$ )

Dans un bécher thermostaté à une température de  $28,8^\circ C$ , un expérimentateur mélange une solution de peroxydisulfate de sodium avec une solution d'iodure de potassium tout en déclenchant le chronomètre. Il se produit une réaction d'oxydation totale conduisant à la formation de  $I_3^-$  dont l'équation bilan est donnée ci-dessous.  $3 I^- + S_2O_8^{2-} = I_3^- + 2 SO_4^{2-}$

Pour cette première expérience, la concentration initiale en iodure est  $[I^-] = 200 \text{ mmol.L}^{-1}$  et la concentration initiale en peroxydisulfate  $C_0$  est égale à  $2,24 \text{ mmol.L}^{-1}$ . L'expérimentateur effectue des prélèvements afin de suivre la concentration  $x = [I_3^-]_t$ , exprimée en  $\text{mmol.L}^{-1}$ , au cours du temps. Les résultats obtenus sont représentés par les figures 1, 2 et 3 qui représentent respectivement  $x$ ,  $\ln(C_0 - x)$  et  $\frac{1}{C_0 - x}$  en fonction du temps.

#### 1 Modélisation de la vitesse de la réaction

**1-1.** En appelant  $\alpha$  l'ordre par rapport à l'iodure,  $\beta$  l'ordre par rapport au peroxydisulfate et  $k$  la constante de vitesse, donner l'expression de la vitesse de la réaction.

**1-2.** Compte tenu des conditions initiales, donner une expression simplifiée de cette vitesse de réaction. On notera  $K_1$  la constante de vitesse apparente de cette première expérience.

**1-3.** Dédurre de l'équation précédente l'équation différentielle à laquelle satisfait la fonction  $x = f(t)$ .

Figure 1

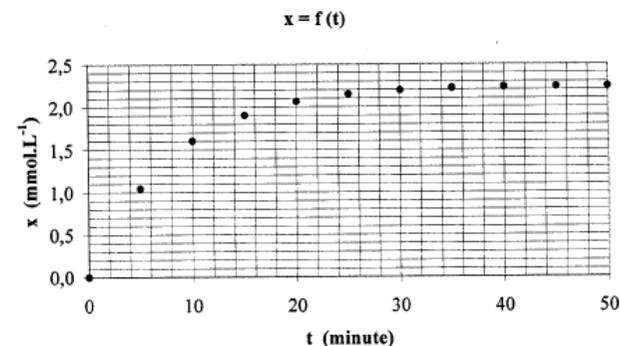


Figure 2

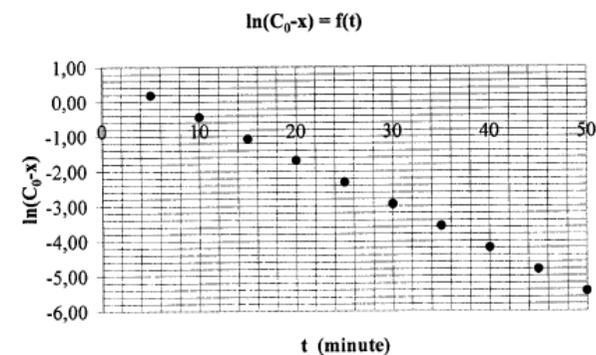
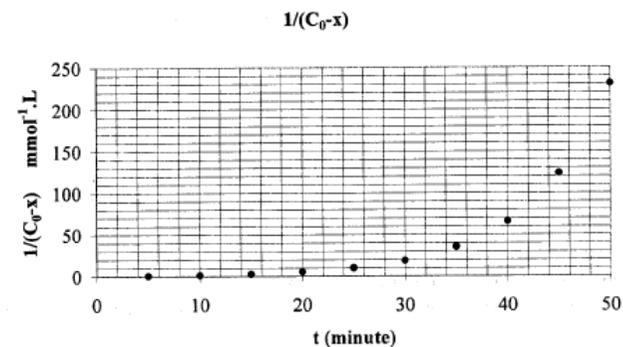


Figure 3



## 2 Identification des paramètres du modèle,

**2-1.** En utilisant les figures 1, 2 et 3 identifier l'ordre partiel  $P$  (nombre entier pouvant être égal soit à 0 soit à 1 soit à 2) puis donner la valeur numérique de la constante de vitesse  $K_1$  (constante apparente de l'expression simplifiée relative à l'essai n°1) en précisant son unité.

**2-2.** L'expérimentateur effectue 2 autres manipulations (avec une concentration initiale en peroxydisulfate toujours égale à  $2,24 \text{ mmol.L}^{-1}$ ). Ses résultats sont regroupés dans le tableau

Essai n°	$\theta(^{\circ}\text{C})$	$[\text{I}^-]_0 (\text{mmol.L}^{-1})$	$K_i (\text{min}^{-1})$
2	28,8	400	0,249
3	37,1	200	0,180

**2-2-1.** Déterminer la valeur numérique de l'ordre partiel  $\alpha$ .

**2-2-2.** En déduire la valeur numérique de la constante de vitesse  $k$  pour les essais n°2 et n°3.

**2-2-3.** Déterminer, à partir des résultats de la question précédente, la valeur numérique de l'énergie d'activation de la réaction. On prendra  $R = 8,314 \text{ J.mol}^{-1}.\text{K}^{-1}$  pour la constante des gaz parfaits.

# Problème 2

## Etude d'une bobine

On dispose d'une bobine B que l'on assimilera à l'association série d'une inductance  $L$  et d'une résistance  $r$ . ( $L$  et  $r$  sont des constantes positives, indépendantes de la fréquence)

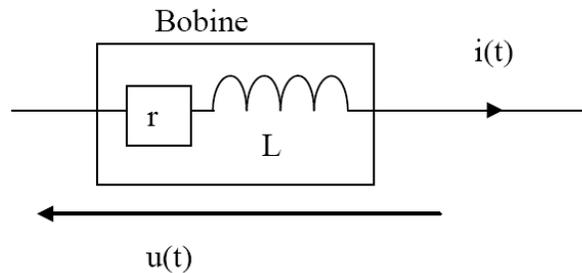


Figure 1

## Détermination de $r$

1) La bobine est parcourue par un courant  $i(t)$ . Exprimer la tension  $u(t)$  à ses bornes en fonction de  $r$ ,  $L$ ,  $i(t)$  et de sa dérivée par rapport au temps.

2) On réalise le circuit suivant, en plaçant, en série avec la bobine, un résistor de résistance  $R = 40 \Omega$ . L'alimentation est un générateur de tension continue, constante, de force électromotrice  $E_0 = 1,0 \text{ V}$  et de résistance interne  $r_0 = 2,0 \Omega$ .

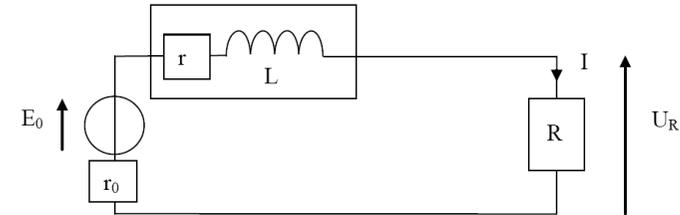


Figure 2

Retrouver l'équation différentielle qui permet de décrire l'évolution du courant dans le circuit lorsqu'on met le générateur en service. Résoudre cette équation.

On mesure, en régime permanent, la tension  $U_R$  aux bornes de  $R$ . Exprimer  $r$  en fonction des données de cette question. Calculer  $r$  avec  $U_R = 0,56 \text{ V}$ .

## Détermination de $r$ et $L$ à partir d'un oscillogramme

On place, en série avec la bobine, un résistor de résistance  $R = 40 \Omega$  et un condensateur de capacité  $C = 10 \mu\text{F}$ .

Le GBF (générateur basses fréquences) est réglé pour délivrer une tension sinusoïdale de fréquence  $f = 250 \text{ Hz}$  (la pulsation sera notée  $\omega$ ) et de valeur crête à crête de  $10 \text{ V}$ . Deux tensions sont visualisées sur un oscilloscope numérique.

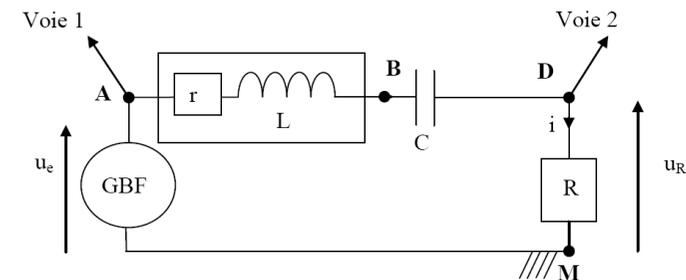


Figure 3

On obtient un oscillogramme équivalent au graphe suivant

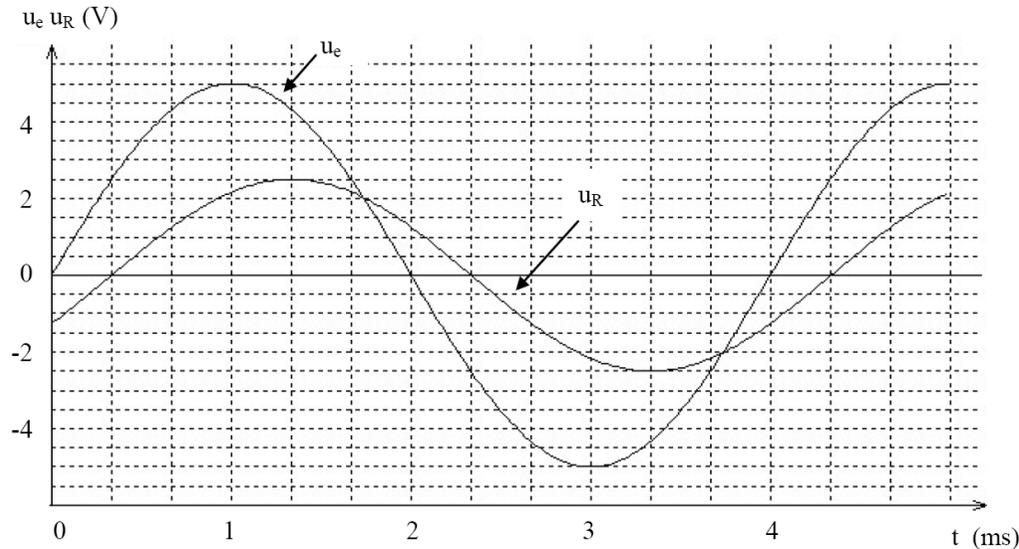


Figure 4

- 3) Déterminer l'amplitude  $U_e$  de la tension  $u_e$  et l'amplitude  $U_R$  de la tension  $u_R$ .
- 4) Déterminer l'amplitude  $I$  du courant  $i$ .
- 5) Rappeler l'expression générale de l'impédance  $Z$  d'un dipôle quelconque (module de l'impédance complexe). Calculer alors l'impédance  $Z_{AM}$  du dipôle AM.
- 6) Des deux tensions,  $u_R(t)$  et  $u_e(t)$ , laquelle, et pourquoi d'après l'oscillogramme, est en avance sur l'autre ?
- 7) Déterminer précisément, à partir de l'oscillogramme, le déphasage  $\varphi_{u_e/i}$  entre  $u_e$  et  $i$ , (c'est à dire entre  $u_e$  et  $u_R$ ).
- 8) Ecrire l'expression générale de l'impédance complexe  $\underline{Z}_{AM}$  en fonction de  $r, R, L, C, \omega$ .
- 9) Ecrire l'expression de l'impédance complexe  $\underline{Z}_{AM}$  en fonction de son module  $Z_{AM}$  et du déphasage  $\varphi_{u_e/i}$ .
- 10) Exprimer  $r$  en fonction de  $R, Z_{AM}$  et  $\varphi_{u_e/i}$ . Calculer sa valeur.
- 11) Exprimer  $L$  en fonction de  $C, \omega, Z_{AM}$  et  $\varphi_{u_e/i}$ . Calculer sa valeur.

### Etude de la fonction de transfert

- 12) Rappeler la définition de la fonction de transfert  $\underline{H}$  du filtre ainsi formé avec  $u_e$  pour tension d'entrée et  $u_R$  pour tension de sortie.
- 13) Proposer un schéma équivalent en basses puis en hautes fréquences et en déduire la nature probable du filtre.
- 14) Exprimer  $\underline{H}$  en fonction de  $r, R, L, C, \omega$ .
- 15) Mettre  $\underline{H}$  sous la forme :

$$\underline{H} = \frac{H_{\max}}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$$

On exprimera littéralement  $H_{\max}$ , le paramètre  $\omega_0$  ainsi que le facteur de qualité  $Q$  de ce circuit en fonction de  $r, R, L, C$ .

- 16) La figure 5 représente (en partie) le diagramme de BODE du filtre précédent. Rappeler la définition du diagramme de BODE.
- 17) Déterminer, à partir du graphe et des données initiales, les valeurs de  $r$  et  $L$ .

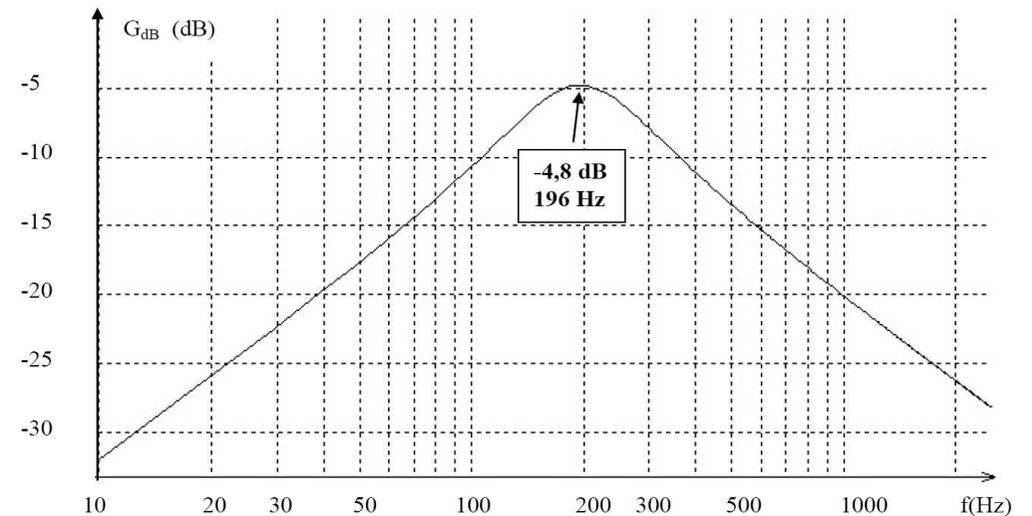


Figure 5

### Facteur de puissance

On reprend le montage figure 3 avec  $f = 250$  Hz.

18) Rappeler la définition du facteur de puissance d'un circuit.

19) On place alors, en parallèle sur AD une boîte de condensateurs à décades (figure 6) et l'on fait varier cette capacité  $C'$  jusqu'à ce que, en observant l'oscilloscope,  $u_R$  et  $u_e$  soient en phase.

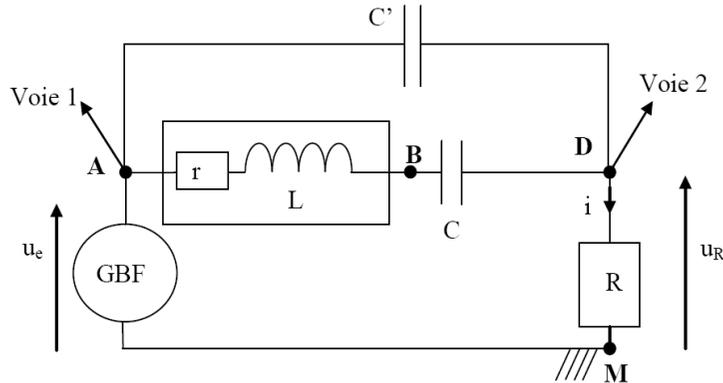


Figure 6

Quelle est alors la valeur du facteur de puissance du circuit AM?

20) Quelle est alors la valeur du facteur de puissance du circuit AD?

21) Quelle particularité présente alors l'admittance complexe  $\underline{Y}_{AD}$  du circuit AD?

22) Exprimer  $\underline{Y}_{AD}$  en fonction de  $r$ ,  $L$ ,  $C$ ,  $C'$  et de la pulsation  $\omega$ .

23) Déterminer  $C'$  en fonction de  $r$ ,  $L$ ,  $C$ ,  $\omega$ . Faire l'application numérique avec les valeurs de  $r$  et  $L$  calculées précédemment.

## Problème 3

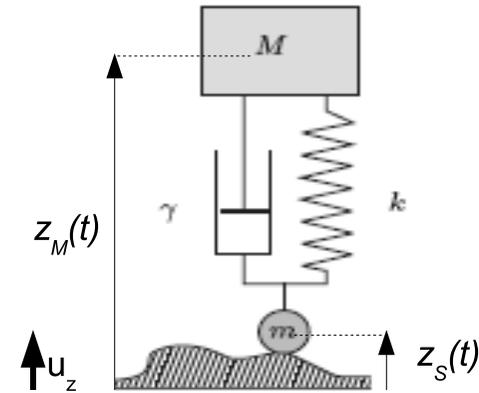
La liaison entre la masse  $M$ , d'altitude  $z_M$ , et le sol se fait par l'intermédiaire d'un ressort de raideur  $k$ , de longueur à vide  $\ell_0$  et de masse négligeable et d'un amortisseur (voir figure) qui exerce sur la masse  $M$  une force de type visqueux donnée par :

$$\vec{F} = -\gamma \frac{d\ell}{dt} \vec{u}_z$$

où  $\ell = z_M - z_m$  est la longueur instantanée du ressort et  $\gamma$  une constante. À l'extrémité inférieure de ce ressort, le contact avec le sol se fait par l'intermédiaire d'une petite masse  $m < M$  qui reste toujours en contact avec le sol.

La variation d'altitude du sol a pour valeur :

$$z_S(t) = z_0(1 - \cos \omega t) \vec{u}_z$$



1. Écrire l'équation du mouvement de la masse  $M$ , dans le cas où  $m$  reste en contact avec le sol, à l'aide de  $z_m$  et  $\dot{z}_m$  et des constantes  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{M}}$  et  $\frac{1}{\tau} = \frac{\gamma}{M}$ .

2. Déterminer la longueur du ressort  $\ell_1$  à l'équilibre en fonction de  $M$ ,  $g$ ,  $k$  et  $\ell_0$

3. Montrer que le mouvement de  $M$  comporte un régime transitoire qui s'atténue au cours du temps. Donner une description qualitative des divers régimes que l'on peut rencontrer ; les discuter selon la valeur du paramètre  $\alpha = \frac{1}{\omega_0 \tau}$ .

4. On se place dorénavant en régime sinusoïdal forcé, c'est-à-dire que l'on suppose le régime transitoire achevé. On pose  $z_m = \text{Re}(z_m)$  avec  $z_m = z_0(1 - e^{j\omega t})$  et  $Y_M = z_M - \ell_1 - z_0 = \text{Re}(Y_M)$  ; expliciter en notation complexe  $\underline{Y}_M$  en fonction de  $z_0$ ,  $\omega$ ,  $\omega_0$  et  $\tau$ .

5. On s'intéresse à l'amplitude de vibration de  $M$  en fonction de  $\omega$ . Montrer qu'elle s'exprime, en posant  $x = \omega^2 / \omega_0^2$ , sous la forme :

$$\frac{|\underline{Y}_M|}{z_0} = \sqrt{\frac{1 + \alpha x}{(1 - x^2)^2 + \alpha x}}$$

6. Etudier qualitativement sa variation en fonction de  $x$  ; on précisera en particulier les valeurs de  $x$  pour lesquelles ce rapport vaut 1. Calculer numériquement la position et le maximum de ce rapport pour  $\alpha = 4$  et  $\alpha = 1$ .

# Commentaires et correction :

## Problème 1

Problème extrait du concours CCP MP. Assez classique et plutôt bien traité dans l'ensemble. Les erreurs se concentrent sur les applications numériques où les unités n'ont pas été toujours bien tenues en compte.

## Problème 2

Très bon problème de révision, théorique et expérimental. Notez la nécessité qu'il y a de retenir ce qui est fait en TP (mesure d'amplitude et de déphasage ici par exemple).

La partie sur le facteur de puissance a été très délaissée mais c'est un ultraclassique, notamment des oraux, qu'il faut savoir résoudre.

## Problème 3

Extrait d'un problème de l'école polytechnique, ce problème nécessitait beaucoup d'application dans l'établissement de l'équation différentielle du mouvement. Deux choses sont faciles à faire :

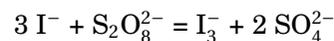
1. citer le référentiel et le système étudié
2. vérifier que la longueur du ressort à l'équilibre est plus petite que la longueur à vide, ce qui est normal car il y a une masse sur le ressort !

Il y avait une erreur de frappe dans le sujet à la question 4. qui n'a gêné que l'un d'entre vous qui a par ailleurs corrigé la faute.

## Problème 1

### Cinétique d'oxydation des ions iodure ( $I^-$ ) par les ions péroxodisulfate ( $S_2O_8^{2-}$ )

1-1. La vitesse de la réaction



est donnée par  $v = k[I^-]^\alpha [S_2O_8^{2-}]^\beta$

1-2. Comme  $[I^-]_0 \gg [S_2O_8^{2-}]_0$ , on suppose que  $[I^-] \approx \text{const.}$ . Il y a dégénérescence de l'ordre et  $v = K_1 [S_2O_8^{2-}]^\beta$  avec  $K_1 = k[I^-]^\alpha = \text{const.}$

1-3. La vitesse vaut aussi  $v = -\frac{d[S_2O_8^{2-}]}{dt} = -\frac{d}{dt}(C_0 - x)$  soit :

$$v = \frac{dx}{dt} = K_1 (C_0 - x)^\beta$$

2-1. On constate que  $\ln(C_0 - x)$  est représentée par une droite en fonction du temps, ce qui s'explique par un ordre  $\beta = 1$ . En effet, on a alors :

$$\frac{dx}{dt} + K_1 x = K_1 C_0 \quad \text{d'où} \quad x = C_0 + \lambda e^{-K_1 t} = C_0 (1 - e^{-K_1 t})$$

car  $x(0) = 0$ . On a donc  $\ln(C_0 - x) = \ln C_0 e^{-K_1 t}$  soit

$$\ln(C_0 - x) = \ln C_0 - K_1 t$$

$\ln(C_0 - x)$  varie ainsi linéairement avec  $t$ . La pente vaut  $:-K_1 = \frac{-5,4 - 1}{50 - 0}$  soit

$$K_1 = 0,13 \text{ min}^{-1}$$

2-2-1. Dans les essais 1 et 2, la température ne varie pas donc  $k$  non plus. On constate que  $K_{\text{essai 2}} \approx K_{\text{essai 1}}$  alors que  $[I^-]_{0\text{essai 2}} = 2[I^-]_{0\text{essai 1}}$ . Comme  $K = k[I^-]_0^\alpha$  cela impose  $\alpha = 1$

2-2-2. La constante de vitesse vaut  $k = \frac{K}{[I^-]_0}$ , on a donc :

$$k_{\text{essai 2}} = \frac{0,249}{400} = 6,2 \times 10^{-4} \text{ min}^{-1} \cdot \text{mmol}^{-1} \cdot \text{L}$$

$$k_{\text{essai 3}} = \frac{0,180}{200} = 9 \times 10^{-4} \text{ min}^{-1} \cdot \text{mmol}^{-1} \cdot \text{L}$$

2-2-3. D'après la loi d'ARRHENIUS,  $k = A \exp\left(-\frac{E_a}{RT}\right)$  d'où

$$\frac{k_{\text{essai 2}}}{k_{\text{essai 3}}} = \exp\left[-\frac{E_a}{R}\left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_3}\right)\right]$$

et

$$E_a = \frac{R}{\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_3}} \ln \frac{k_{\text{essai 3}}}{k_{\text{essai 2}}} = 34,6 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$$

## Problème 2

ENSTIM 2009 Epreuve commune

### Etude d'une bobine

1) Tension aux bornes de la bobine B :

$$u(t) = ri(t) + L \frac{di}{dt}$$

2) Pour le montage proposé, la loi des mailles conduit à :

$$L \frac{di}{dt} + (R + r + r_0)i = E_0$$

C'est une équation différentielle linéaire du 1er ordre, dont la solution générale s'écrit :

$$i = \frac{E_0}{R + r + r_0} + \lambda e^{-\frac{t}{\tau}}$$

avec  $\tau = \frac{L}{R + r + r_0}$ .

La constante  $\lambda$  se détermine par la condition initiale  $i(t=0) = 0$ , due à la continuité de l'intensité du courant traversant la bobine (on suppose que  $i = 0$  pour  $t < 0$ ).

On a finalement :

$$i = \frac{E_0}{R + r + r_0} \left[ 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right]$$

Le régime permanent s'obtient en prenant  $i(t \rightarrow \infty)$  ou bien en constatant qu'en régime permanent, la bobine se comporte comme un fil. On a alors  $U_R = \frac{R}{R+r+r_0} E_0$

(diviseur de tension), d'où  $r = \left( \frac{E_0}{U_R} - 1 \right) R - r_0$ . AN :  $r = 29 \Omega$ .

3) Par lecture de l'oscillogramme :  $U_e = 5,0 \text{ V}$  et  $U_R = 2,5 \text{ V}$ .

4)  $I = \frac{U_R}{R}$ , donc  $I = 0,063 \text{ A}$ .

5) Si  $U$  est l'amplitude de la tension aux bornes d'un dipôle quelconque et  $I$  l'amplitude de l'intensité qui le traverse, alors  $Z = \frac{U}{I}$ . Pour le dipôle  $AM$ , on a  $Z_{AM} = \frac{U_e}{I}$ .

AN :  $Z_{AM} = 80 \Omega$ .

6) La tension  $u_e(t)$  est en avance sur  $u_R(t)$ , car elle passe par son maximum 0,33 ms avant.

7) Si on note  $\tau = 0,33 \text{ ms}$  l'avance de  $u_e(t)$  sur  $u_R(t)$ , alors l'avance de phase de  $u_e(t)$  sur  $i(t)$  est  $\varphi_{u_e/i} = \omega\tau = 2\pi\tau f$ . AN :  $\varphi_{u_e/i} = 0,52 \text{ rad} (= 30^\circ)$ .

8)  $Z_{AM} = r + jL\omega + \frac{1}{jC\omega} + R$ , donc  $Z_{AM} = R + r + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)$ .

9)  $Z_{AM} = \frac{u_e}{i} = \frac{U_e e^{j\varphi_{u_e/i}}}{I}$ . Donc  $Z_{AM} = Z_{AM} e^{j\varphi_{u_e/i}}$ .

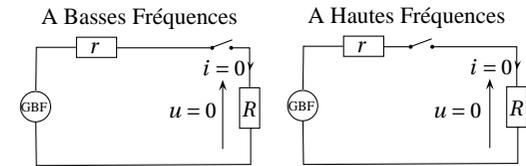
10) D'après 8),  $R + r = \text{Re}(Z_{AM}) = Z_{AM} \cos \varphi_{u_e/i}$ . Donc  $r = Z_{AM} \cos \varphi_{u_e/i} - R$ . AN :  $r = 29 \Omega$ .

11) D'après 8),  $L\omega - \frac{1}{C\omega} = \text{Im}(Z_{AM})$ . Donc  $L = \frac{1}{\omega} \left( Z_{AM} \sin \varphi_{u_e/i} + \frac{1}{C\omega} \right)$ . AN :  $L = 0,066 \text{ H}$ .

12) Fonction de transfert du filtre :

$$H = \frac{u_R}{u_e}$$

13) À basse fréquence, l'inductance  $L$  est équivalente à un fil, le condensateur  $C$  est équivalent à un interrupteur ouvert. À haute fréquence, l'inductance  $L$  est équivalente à un interrupteur ouvert, le condensateur  $C$  est équivalent à un fil. On obtient les schémas équivalents suivants :



Le signal ne passant ni à basse fréquence ni à haute fréquence, le filtre est probablement un passe-bande.

14)  $H = \frac{u_R}{u_e} = \frac{R}{Z_{AM}}$ . Donc  $H = \frac{R}{R + r + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)}$ .

15)  $H = \frac{\frac{R}{R+r}}{1 + \frac{j}{R+r} \left( L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)} = \frac{\frac{R}{R+r}}{1 + j \frac{1}{R+r} \sqrt{\frac{L}{C}} \left( \sqrt{LC}\omega - \frac{1}{\sqrt{LC}\omega} \right)}$ . En posant  $H_{\max} = \frac{R}{R+r}$ ,  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  et  $Q = \frac{1}{R+r} \sqrt{\frac{L}{C}}$ , on obtient bien  $H = \frac{H_{\max}}{1 + jQ \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)}$ .

16) Le diagramme de Bode est constitué de la représentation du gain logarithmique  $G_{dB} = 20 \log |H|$  en fonction de  $\log \omega$  et de la représentation de la phase  $\varphi = \text{Arg} H$  en fonction de  $\log \omega$ .

17)  $|H| = \frac{H_{\max}}{\sqrt{1 + Q^2 \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2}}$ . Donc  $|H|$  est maximal si  $1 + Q^2 \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2$  est minimal,

i.e. si  $\omega = \omega_0$ . Alors  $G_{dB, \max} = 20 \log H_{\max} = 20 \log \frac{R}{R+r}$ . D'autre part, par lecture du diagramme de Bode, on obtient  $G_{dB, \max} = G_{dB}(\omega_0 = 2\pi f_0) = -4,8 \text{ dB}$ , avec  $f_0 = 196 \text{ Hz}$ .

On en déduit  $L = \frac{1}{4\pi^2 f_0^2 C}$  et  $r = R \left( 10^{-\frac{G_{dB, \max}}{20}} - 1 \right)$ . AN :  $L = 0,066 \text{ H}$ ,  $r = 29,5 \Omega$ .

18) Le facteur de puissance d'un circuit est le cosinus du déphasage entre la tension aux bornes du circuit et l'intensité le traversant.

19) La tension aux bornes du circuit  $AM$  est  $\underline{u}_e(t)$ , l'intensité le traversant est en phase avec  $\underline{u}_R(t)$ .  $\underline{u}_R(t)$  et  $\underline{u}_e(t)$  étant en phase,  $\varphi_{u_e/i} = 0$  et  $\cos \varphi_{u_e/i} = 1$  : le facteur de puissance du circuit  $AM$  est égal à 1.

20)  $\underline{u}_{AD}(t) = \underline{u}_e(t) - \underline{u}_R(t)$ .  $\underline{u}_R(t)$  et  $\underline{u}_e(t)$  étant en phase,  $\underline{u}_{AD}(t)$  est également en phase avec  $\underline{u}_R(t)$ , c'est-à-dire avec  $\underline{i}(t)$ . Le facteur de puissance du circuit  $AD$  est donc égal à 1.

21)  $\cos \varphi = \frac{\text{Re}(\underline{Z}_{AD})}{|\underline{Z}_{AD}|} = \frac{\text{Re}(\underline{Y}_{AD})}{|\underline{Y}_{AD}|} = 1$ . On a donc  $\underline{Y}_{AD} \in \mathbb{R}$ .

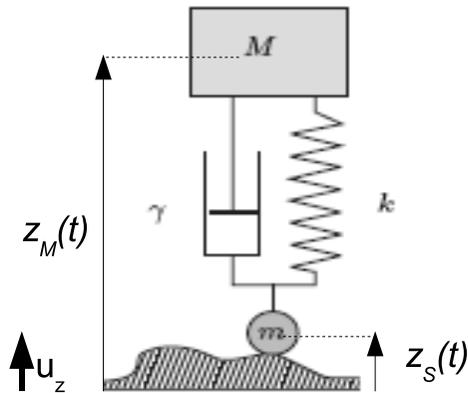
22)  $\underline{Y}_{AD} = jC'\omega + \frac{1}{r + j(L\omega - \frac{1}{C\omega})}$ .

23)  $\underline{Y}_{AD} = jC'\omega + \frac{r - j(L\omega - \frac{1}{C\omega})}{r^2 + (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2}$ .  $\text{Im}(\underline{Y}_{AD}) = 0 \Leftrightarrow C' = \frac{L - \frac{1}{C\omega^2}}{r^2 + (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2}$ . AN :

$C' = 1,0 \cdot 10^{-5}$  F.

## Problème 3

X MP 2004



1. Dans le référentiel galiléen lié au sol, la masse  $M$  est soumise à son poids  $\vec{P} = m\vec{g}$ , à la force de rappel du ressort :  $\vec{F} = -k(\ell - \ell_0)\vec{u}_z$  et une force de frottement  $\vec{f} = -\gamma \frac{d\ell}{dt} \vec{u}_z$ .

La Relation Fondamentale de la Dynamique s'écrit en projection sur  $\vec{u}_z$  :

$$M\ddot{z}_M = -Mg - k(\ell - \ell_0) - \gamma \frac{d\ell}{dt}$$

Comme  $\ell = z_M - z_m$ , on obtient, après division par  $M$  :

$$\ddot{z}_M + \frac{\gamma}{M} \dot{z}_M + \frac{k}{M} z_M = -g + \frac{k\ell_0}{M} + \frac{k}{M} z_m + \frac{\gamma}{M} \dot{z}_m$$

Avec  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{M}}$  et  $\frac{1}{\tau} = \frac{\gamma}{M}$ , on obtient :

$$\ddot{z}_M + \frac{1}{\tau} \dot{z}_M + \omega_0^2 z_M = -g + \omega_0^2 \ell_0 + \omega_0^2 z_m + \frac{1}{\tau} \dot{z}_m$$

2. A l'équilibre  $\dot{z}_M = 0$  et  $\dot{z}_m = 0$ , il vient alors :

$$\omega_0^2 z_M = -g + \omega_0^2 \ell_0 + \omega_0^2 z_m$$

d'où

$$\ell_1 = z_M - z_m = \ell_0 - \frac{g}{\omega_0^2}$$

3. La solution générale de l'équation en  $z_M$  est :

$$z_M(t) = z_{\text{particulière}} + z_{\text{homogène}}$$

La solution de l'équation homogène associée correspond au régime transitoire ; elle est obtenue en résolvant l'équation caractéristique :

$$r^2 + \frac{1}{\tau} r + \omega_0^2 = 0$$

soit

$$r_{\pm} = -\frac{1}{2\tau} \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2}$$

où  $\Delta$  est le discriminant. Dans tous les cas ( $\Delta$  réel ou complexe),  $r$  possède une partie réelle négative donc la solution de l'équation homogène décroît au cours du temps.

4. Avec les notations du texte, on a :

$$\underline{Y}_M = \underline{Z}_M e^{j\omega t} - \ell_0 + \frac{g}{\omega_0^2} - z_0$$

où  $\underline{Z}_M e^{j\omega t}$  est la représentation complexe de  $z_M$  et  $\underline{Z}_M$  l'amplitude complexe de  $z_M$ .

5. Avec les expressions de la question précédente, on peut écrire :

$$\underline{z}_M = \underline{Z}_M e^{j\omega t} = \underline{Y}_M + \ell_0 - \frac{g}{\omega_0^2} + z_0$$

$$\dot{\underline{z}}_M = \frac{d}{dt} [\underline{Z}_M e^{j\omega t}] = j\omega \underline{Y}_M$$

$$\ddot{\underline{z}}_M = \frac{d^2}{dt^2} [\underline{Z}_M e^{j\omega t}] = -\omega^2 \underline{Y}_M$$

Par ailleurs, on a :

$$\begin{aligned} \underline{z}_m &= z_0(1 - e^{j\omega t}) \\ \dot{\underline{z}}_m &= \frac{d}{dt} [\underline{z}_m] = -j\omega z_0 e^{j\omega t} \end{aligned}$$

En reportant ces expressions dans l'équation de  $\underline{z}_M$ , on obtient :

$$\begin{aligned} -\omega^2 \underline{Y}_M + \frac{j\omega}{\tau} \underline{Y}_M + \omega_0^2 (\underline{Y}_M + \ell_0 - \frac{g}{\omega_0^2} + z_0) = \\ -g + \omega_0^2 \ell_0 + \omega_0^2 z_0 (1 - e^{j\omega t}) - \frac{j\omega}{\tau} z_0 e^{j\omega t} \end{aligned}$$

soit :

$$\underline{Y}_M \left( -\omega^2 + \frac{j\omega}{\tau} + \omega_0^2 \right) = z_0 e^{j\omega t} \left( -\omega_0^2 - \frac{j\omega}{\tau} \right)$$

On en tire  $\underline{Y}_M$ , et en prenant le module :

$$\frac{|\underline{Y}_M|}{z_0} = \sqrt{\frac{\omega_0^4 + \left(\frac{\omega}{\tau}\right)^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \left(\frac{\omega}{\tau}\right)^2}}$$

En posant  $x = \omega^2 / \omega_0^2$  et en divisant en haut et en bas sous la racine par  $\omega_0^4$ , on ob-

tient :

$$\frac{|\underline{Y}_M|}{z_0} = \sqrt{\frac{1 + \left(\frac{1}{\tau\omega_0}\right)^2 x}{(1 - x^2)^2 + \left(\frac{1}{\tau\omega_0}\right)^2 x}}$$

C'est bien l'expression proposée avec  $\alpha = \frac{1}{\tau\omega_0}$

6. Pour  $x \rightarrow \infty$ ,  $\frac{|\underline{Y}_M|}{z_0} \rightarrow 0$ . Pour  $x \rightarrow 0$ ,  $\frac{|\underline{Y}_M|}{z_0} \rightarrow 1$ . Enfin pour  $x = 1$ ,  $\frac{|\underline{Y}_M|}{z_0} = \sqrt{\frac{1+\alpha}{\alpha}} > 1$ .

On obtient l'allure suivante pour la courbe avec  $\alpha = 1$  et  $\alpha = 4$  :

