DS 6 le 18 mars 2013

CINÉTIQUE CHIMIQUE – MÉCANIQUE

NB : *Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées.*
Toute application numérique ne comportant pas d'unité ne donnera pas lieu à attribution de points.
Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Problème 1
Cinétique enzymatique

Approximation du quasi-équilibre.

La vitesse d'une réaction en catalyse enzymatique, dans laquelle un substrat S est converti en un produit P, dépend de la concentration de l'enzyme E, bien que celle-ci ne subisse pas globalement de modification.
Pour la réaction suivante :

$$S \overset{\text{catalyseur } E}{\rightarrow} P$$

on définit la vitesse de la réaction comme étant la vitesse d'apparition du produit P.
En 1913 (Biochem, Zeitschrift 49, 333 (1913)), MICHAELIS et MENTEN ont proposé un schéma simplifié en deux etapes. Ces auteurs ont fait l'hypothèse que, dans l'addition de l'enzyme il s'établit un équilibre rapide entre les formes libres de l'enzyme et du substrat (E et S) et le complexe enzyme-substrat (ES), appele complexe de MICHAELIS et MENTEN qui réagit ensuite avec une constante de vitesse du premier ordre k_{cat} (étape limitante). L'équilibre de dissociation du complexe enzyme-substrat est caractérisé par sa constante de dissociation K_S :

1) équilibre rapide $\quad S + E \rightleftharpoons ES \quad K_f = \dfrac{1}{K_S}$

2) étape lente $\quad ES \overset{k_{\text{cat}}}{\rightarrow} P + E$

1- On note $[E]_0$ la concentration initiale en enzyme. A l'aide de l'écriture de la constante de dissociation et en considérant la conservation de l'enzyme, montrer que l'on peut exprimer la vitesse v de la réaction en fonction de la concentration en substrat :

$$v = \frac{v_{\max}[S]}{[S] + K_S}$$

Donner l'expression de $v_{\max}$ en fonction de k_{cat} et de la concentration initiale en enzyme $[E]_0$.

2- Quelle est la limite asymptotique de v lorsque $[S] \to \infty$? Retrouver par un raisonnement physique l'expression de cette limite.

3- Tracer l'allure de $v = f([S])$. Comment peut-on utiliser ce graphe pour avoir accès expérimentalement à $v_{\max}$ et K_S ? Cette méthode est-elle précise ? Pourquoi ?

4- Montrer que le tracé de $1/v$ en fonction de $1/[S]$ permet d'accéder plus précisement à $v_{\max}$ et K_S.

Approximation de l'état quasi-stationnaire

BRIGGS et HALDANE ont développé un mécanisme plus général (Biochem. J., 19, 338 (1925)), ils ont montré qu'il ne s'établit pas forcément pour toutes les enzymes un équilibre rapide entre les formes libres de l'enzyme et du substrat (E et S) et le complexe enzyme-substrat (ES). Dans leur modèle, après un court délai, c'est la concentration du complexe enzyme–substrat ES qui est constante.

$$\begin{aligned} S + E = ES &\quad \text{constantes } k_1 \text{ et } k_{-1} \\ ES \to P + E &\quad \text{constantes } k_2 \end{aligned}$$

5- Déterminer l'expression de la vitesse globale de ce schéma, l'écrire sous la forme :

$$v = \frac{v_{\max}[S]}{[S] + K_M}$$

6- Expliciter K_M (constante de MICHAELIS relative au substrat) et $v_{\max}$ en fonction des constantes de vitesse du modèle de BRIGGS et HALDANE.

7- Dans quel cas les constantes K_M et K_S sont-elles égales ?

En pratique, il n'est pas toujours aisé de connaître la concentration en substrat libre $[S]$ dans la solution. Afin de déterminer expérimentalement K_M et $v_{\max}$ on effectue alors une série de mesures de la vitesse initiale pour différentes concentrations choisies en substrat.

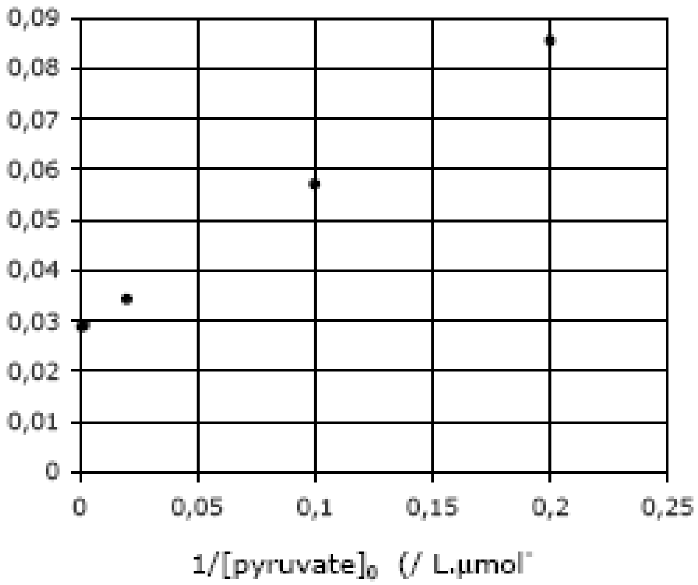
8- Quelles sont les hypothèses et conditions expérimentales à vérifier pour que cette méthode soit valide ?

9- Le produit P est la seule espèce présente à absorber la lumière à une longueur d'onde λ_0 située dans le visible. Proposer un protocole expérimental détaillé permettant de déterminer K_M et $v_{\max}$.

Pour le couple enzyme-substrat étudié, c'est-à-dire flavocytochrome b2 et pyruvate, on réalise une série de mesures de vitesse de reaction (initiale) en fonction de diverses concentrations initiales choisies en pyruvate :

$[\text{pyruvate}]_0$ (μmol.L^{-1})	5	10	50	500	1000
v_0 (mmol.L^{-1}.s^{-1})	11,7	17,5	29,2	34,3	34,7

le tracé de $1/v_0$ en fonction de $1/[\text{pyruvate}]_0$ est représenté ci-dessous



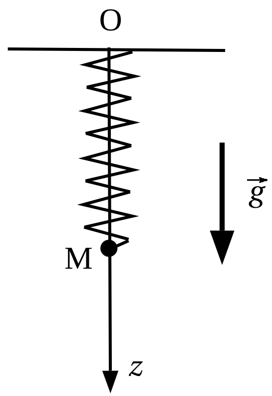
10- Déterminer graphiquement K_M et $v_{\max}$.

Problème 2

Le problème étudie différents oscillateurs en vue de l'application du théorème du viriel. Celui-ci affirme en particulier que si un point matériel $M(x,y,z)$ possède une énergie potentielle $E_p(x,y,z)$ vérifiant la propriété suivante : $E_p(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \lambda^k E_p(x,y,z)$ pour tout λ réel alors il existe la relation suivante entre valeurs moyennes temporelles au cours du mouvement de M $k < E_p >= 2 < E_c >$ à condition que la trajectoire soit bornée.
E_c désigne l'énergie cinétique de M et $< f >$ la valeur moyenne de $f(t)$ au cours du temps.
Nous ne considèrerons que des mouvements périodiques donc les moyennes seront calculées sur une période.
Dans tout le problème l'étude est faite dans un référentiel galiléen $\mathscr{R}$ auquel est associé un repère orthonormé (O,x,y,z).

I Oscillateur harmonique dans un champ de pesanteur

Un point matériel M de masse m pouvant se mouvoir dans la direction Oz (verticale descendante) est fixé à l'extrémité d'un ressort de raideur k et de longueur à vide ℓ_0.
Le champ de pesanteur $\vec{g}$ est uniforme (voir figure). On désigne par z la cote de M.



1. a) Écrire l'équation du mouvement du point M ; quelle est la pulsation propre ω_0 du système ?

b) Déterminer sa position d'équilibre z_e.

c) Déterminer $z(t)$ sachant qu'initialement le point est abandonné sans vitesse initiale de la cote $z = \ell_0 + \dfrac{mg}{k} + a$.

2. a) Déterminer l'énergie potentielle $E_p(M)$ du point M en imposant $E_p = 0$ à l'équilibre.

b) Exprimer l'énergie potentielle en fonction de $Z = z - z_e$ et k.

c) Dans le cas du mouvement du **1.c** déterminer les valeurs moyennes de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle. Quelle relation existe-t-il entre ces deux grandeurs ?

d) Application numérique $k = 20$ N.m^{-1}, $m = 100$ g, $a = 5$ cm. Calculer la pulsation des oscillations ainsi que l'énergie potentielle moyenne.

II Mouvement dans un champ newtonien

On considère un satellite de masse m se trouvant à une distance r du centre O de la terre. On note G la constante de gravitation, M_t la masse de la terre et r la distance entre O et le satellite.

1. a) Comment s'écrit la force subie par le satellite ?

b) Déterminer l'énergie potentielle E_p du satellite (avec la convention $E_p = 0$ à l'infini).

c) Comment s'exprime ici le théorème du viriel ? Quelle propriété de l'énergie retrouve-t-on pour un état lié ?

d) Dans le cas où la trajectoire du satellite est circulaire de rayon r_0 déterminer sa vitesse v_c.

Pour la suite, le satellite est lancé à une distance r_0, avec une vitesse orthoradiale (orthogonale au rayon vecteur) de module $v_0 = \alpha\sqrt{\dfrac{GM_t}{r_0}}$ avec $1 < \alpha < \sqrt{2}$

2. a) Montrer que le mouvement est plan. Celui-ci est repéré en coordonnées polaires (r,θ) dans son plan ; montrer que la quantité $r^2\dfrac{d\theta}{dt}$ est constante. Déterminer la valeur de cette constante que l'on notera C.

b) Montrer que la trajectoire est bornée.

c) Montrer que l'équation polaire de la trajectoire peut s'écrire $r = \dfrac{p}{1 + e\cos\theta}$ avec $p = \dfrac{C'}{GM_t}$ où C' est une constante que l'on déterminera.
En outre, il est rappelé que dans le cas d'une trajectoire elliptique l'énergie mécanique vaut : $E = -\dfrac{GM_t m}{2a}$ avec a le demi grand axe.

d) Déterminer le paramètre p de la trajectoire du satellite en fonction de r_0

e) Déterminer l'excentricité de la trajectoire en fonction de α seulement.

f) Calculer les rayons au périgée et à l'apogée. Représenter la trajectoire en précisant le point de départ, l'axe polaire, les foyers.

3. a) Exprimer l'énergie cinétique du satellite en fonction de G, M_t, p, e et θ.

b) Exprimer de même l'énergie potentielle E_p en fonction de G, M_t, p, e et θ.

c) Déduire du théorème du viriel que $<\cos(\theta)>= -e$. Ce résultat vous surprend-t-il ? Que pensez-vous de $<\sin(\theta)>$

4. Pour mieux cerner le résultat précédent on cherche à évaluer les durées de passage du satellite Δt_1 pour un angle θ passant de $-\dfrac{\pi}{2}$ à $+\dfrac{\pi}{2}$ et Δt_2 pour un angle θ passant de $+\dfrac{\pi}{2}$ à $+\dfrac{3\pi}{2}$.

a) On rappelle la troisième loi de KEPLER $\dfrac{T^2}{a^3} = \dfrac{4\pi^2}{GM_t}$ exprimer la période T en fonction de p, C et e.

b) Exprimer la durée Δt que met le satellite pour passer d'un angle polaire θ_1 à θ_2 ; on donnera le résultat en fonction de la période et d'une intégrale sans dimension.
si $e = 0,5$ le calcul numérique donne le résultat suivant :

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{(1 + e\cos\theta)^2} = 0,195$$

Ce résultat est-il en accord avec celui obtenu au **3.c)** ?

5. On considère maintenant le mouvement d'un électron dans un atome d'hydrogène en supposant le noyau fixe en O. L'électron a une masse $m = 9.10^{-31}$ kg et une charge $-q$ avec $q = 1,6.10^{-19}$ C

a) Pourquoi la trajectoire de l'électron est-elle, en général, une ellipse ?

b) On se place dans un cas où l'excentricité de la trajectoire est faible ($e \ll 1$) Comment s'écrit le moment dipolaire instantané de l'atome d'hydrogène ?

Commentaires et correction :

Problème 1

Sujet du concours Mines–Ponts dans la filière PC.
Beaucoup d'entre vous n'ont pas su démarrer le problème car il leur a manqué la relation de conservation de la matière. Nous en avions parlé lors d'une séance d'informatique avec Maple. Je vous conseille de revoir ce que nous avions écrit. Pour ceux qui ont su traiter les premières questions des deux modèles proposés, il n'y a pas eu de problème dans la suite.
J'ai vu beaucoup trop d'erreurs sur l'application numérique de la dernière question : ou bien la valeur numérique était fausse, ou bien c'était l'unité !

Problème 2

Sujet du concours CCP de la filière MP.
Grosse déception car plusieurs d'entre vous ne savent toujours pas établir correctement l'équation d'un ressort vertical ou résoudre l'équation différentielle. Pour l'étude énergétique, il faut tenir compte des deux formes d'énergie potentielle (pesanteur et élastique du ressort).
L'étude des forces de gravitation n'a pas toujours été très performante. Il faut absolument savoir parfaitement :
- justifier la conservation du moment cinétique,
- montrer que le mouvement est plan,
- démontrer la loi des aires,
- montrer que les trajectoires sont des coniques (par les formules de BINET ou sans),
- trouver la vitesse, l'énergie mécanique et la 3ème loi de KEPLER pour un mouvement circulaire.

Problème 1

Quelques problèmes de cinétique chimique

A - Cinétique enzymatique

Filière PC Mines Ponts 2007

1- L'expression de la vitesse se met sous la forme :

$$v = \frac{d[\mathrm{P}]}{dt} = k_{\mathrm{cat}}[\mathrm{ES}]$$

La loi de GULDBERG et WAAGE pour l'équilibre s'écrit :

$$K_S = \frac{[\mathrm{S}][\mathrm{E}]}{[\mathrm{ES}]}$$

La conservation de la matière conduit à :

$$[\mathrm{E}]_0 = [\mathrm{E}] + [\mathrm{SE}]$$

La combinaison de ces deux dernières relations conduit à

$$[\mathrm{E}]_0 = [\mathrm{ES}] + \frac{K_S[\mathrm{ES}]}{[\mathrm{S}]}$$

d'où

$$[\mathrm{ES}] = \frac{[\mathrm{S}][\mathrm{E}]_0}{K_S + [\mathrm{S}]} \qquad (1)$$

L'expression de la vitesse devient :

$$v = k_{\mathrm{cat}}[\mathrm{ES}] = k_{\mathrm{cat}}\frac{[\mathrm{S}][\mathrm{E}]}{K_S} = k_{\mathrm{cat}}\frac{[\mathrm{S}][\mathrm{E}]_0}{K_S + [\mathrm{S}]}$$

Cela correspond bien à l'expression demandée

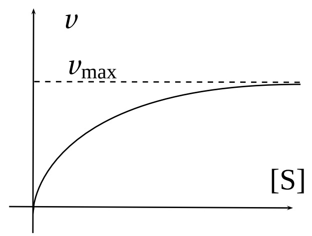
$$v = \frac{v_{\mathrm{max}}[\mathrm{S}]}{[\mathrm{S}] + K_S}$$

avec $v_{\mathrm{max}} = k_{\mathrm{cat}}[\mathrm{E}]_0$

2- Lorsque $[\mathrm{S}] \to \infty$, on constate que v tend vers v_{max}.
Par ailleurs, si la concentration en S est très élevée, on peut considérer qu'elle reste constante et que $[\mathrm{ES}] \simeq [\mathrm{E}]_0$ (d'après la relation (1)). Par suite, comme la concentration en ES reste constante, la vitesse sera elle aussi constante, et égale à v_{max} vu qu'il y a à chaque instant le maximum de complexe ES possible.

3- Pour $[\mathrm{S}] \to \infty$, on a $v \to v_{\mathrm{max}}$. La dérivée de la vitesse vaut :

$$\frac{dv}{dt} = \frac{v_{\mathrm{max}}([\mathrm{S}] + K_S) - v_{\mathrm{max}}[\mathrm{S}]}{(v_{\mathrm{max}}([\mathrm{S}])^2} = \frac{v_{\mathrm{max}}K_S}{(v_{\mathrm{max}}([\mathrm{S}])^2}$$



Pour [S]=0, on constate que la dérivée vaut :

$$\frac{dv}{dt}(0) = \frac{v_{\mathrm{max}}}{K_S}$$

La limite à l'infini donne $v_{\max}$ et la pente à l'origine donne $\dfrac{v_{\max}}{K_S}$ donc K_S.
Cette méthode n'est pas précise car il faut tracer la tangente à l'origine et regarder la valeur asymptotique de la fonction. Il y a une bonne marge d'erreur !

4- On peut écrire :

$$\frac{1}{v}=\frac{[\mathrm{S}]+K_S}{v_{\max}[\mathrm{S}]}=\frac{1}{v_{\max}}+\frac{K_S}{v_{\max}}\frac{1}{[\mathrm{S}]}$$

On a une droite dont la pente et l'ordonnée à l'origine sont obtenues plus précisément et plus facilement.
L'ordonnée à l'origine donne la valeur de $\dfrac{1}{v_{\max}}$ et la pente donne $\dfrac{K_S}{v_{\max}}$.

5- La vitesse de la réaction est donnée par :

$$v=\frac{d[\mathrm{P}]}{dt}=k_2[\mathrm{ES}]$$

Par ailleurs, l'Approximation de l'Etat Quasi-Stationnaire (AEQS) s'applique à ES et donne :

$$\frac{d[\mathrm{ES}]}{dt}=k_1[\mathrm{E}][\mathrm{S}]-k_{-1}[\mathrm{ES}]-k_2[\mathrm{ES}]=0$$

d'où on tire

$$[\mathrm{ES}]=\frac{k_1[\mathrm{S}][\mathrm{E}]}{k_2+k_{-1}}$$

La conservation de la matière conduit alors à :

$$[\mathrm{E}]_0=[\mathrm{E}]+[\mathrm{ES}]=[\mathrm{ES}]\left(1+\frac{k_2+k_{-1}}{k_1[\mathrm{S}]}\right)$$

Ce qui permet d'écrire :

$$\boxed{v=\frac{k_2[\mathrm{E}]_0[\mathrm{S}]}{[\mathrm{S}]+\frac{k_2+k_{-1}}{k_1}}}$$

6- La constante de MICHAELIS vaut :

$$K_M=\frac{k_2+k_{-1}}{k_1}$$

et $v_{\max}=k_2[\mathrm{E}]_0$

7- Lorsque $k_2\ll k_{-1}$ on a $K_M=K_S$. Cela correspond à une situation où la réaction (1) peut effectivement conduire à un équilibre.

8- Le calcul repose sur les hypothèses suivantes :

- on suppose que l'AEQS est vérifiée : il faut donc que le complexe se forme lentement et se détruise facilement.
- il faut aussi que la concentration en substrat ne soit pas trop grande pour ne pas se trouver au niveau de la limite asymptotique de v (cf question **2**).

9- On trace [P]= $f(t)$ pour différentes concentrations initiales en substrat $[\mathrm{S}]_0$ et on détermine la pente à l'origine $v_0=\dfrac{d[\mathrm{P}]}{dt}(t=0)$
Comme $\dfrac{1}{v_0}=\dfrac{1}{v_{\max}}+\dfrac{K_M}{v_{\max}[\mathrm{S}]_0}$ on trace $\dfrac{1}{v_0}=f\left(\dfrac{1}{[\mathrm{S}]_0}\right)$. L'ordonnée à l'origine vaut $\dfrac{1}{v_{\max}}$ et la pente $\dfrac{K_M}{v_{\max}}$.

10- Pour l'ordonnée à l'origine, on trouve :$\dfrac{1}{v_{\max}}=0{,}03$ d'où

$$\boxed{v_{\max}=33\ \mathrm{mmol.L^{-1}.s^{-1}}}$$

La pente vaut : $\dfrac{K_M}{v_{\max}}\dfrac{0{,}086-0{,}03}{(0{,}2-0{,}0).10^3}=2{,}8.10^{-4}$ s, d'où

$$\boxed{K_M=2{,}8.10^{-4}\,v_{\max}=9{,}2.10^{-3}\ \mathrm{mmol.L^{-1}}}$$

Problème 2

CCP MP 2006

I Oscillateur harmonique dans un champ de pesanteur

1. a. La relation fondamentale de la dynamique appliquée au point$M$ donne, en projection sur l'axe Oz : $m\ddot{z}=-k(z-l_0)+mg$ d'où, $\boxed{\ddot{z}+\frac{k}{m}z=\frac{k}{m}l_0+g}$. La pulsation propre est donc $\boxed{\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}}}$.

   b. À l'équilibre $\ddot{z}=0$ et donc $\boxed{z_e=l_0+\frac{mg}{k}}$.

   c. La solution est de la forme $z(t)=A\cos(\omega_0 t+\varphi)+z_e$. les conditions initiales sont $z(0)=z_e+a$ et $\dot{z}(0)=0$; on obtient donc $\boxed{z(t)=a\cos(\omega_0 t)+z_e}$

2. a. L'énergie potentielle du point M est la somme de l'énergie potentielle de pesanteur $-mgz+\text{cste}$ (Oz est orienté vers le bas) et de l'énergie potentielle élastique du ressort $\frac{1}{2}k(z-l_0)^2+\text{cste}$ d'où

$$\boxed{\begin{aligned}E_p(M) = -mg(z-z_e) + \frac{1}{2}k(z-l_0)^2 \\ -\frac{1}{2}k(z_e-l_0)^2\end{aligned}}$$

si l'on impose $E_p(M) = 0$ à l'équilibre.

b. Si l'on pose $Z = z - z_e$, on obtient :

$$\begin{aligned}E_p(M) &= -mgZ + \tfrac{1}{2}k(Z+z_e-l_0)^2 \\ &\quad -\tfrac{1}{2}k(z_e-l_0)^2 \\ &= -mgZ + \tfrac{1}{2}kZ^2 + kZ(z_e-l_0) \\ &\quad +\tfrac{1}{2}k(z_e-l_0)^2 - \tfrac{1}{2}k(z_e-l_0)^2 \\ &= \tfrac{1}{2}kZ^2 + Z(-mg+k(z_e-l_0))\end{aligned}$$

Comme $-mg + k(z_e - l_0) = 0$ correspond à la définition de la position d'équilibre, on a donc

$$\boxed{E_p(M) = \tfrac{1}{2}kZ^2}.$$

c. La valeur moyenne de $E_p(M)$ est

$$\langle E_p(M)\rangle = \tfrac{1}{2}k\langle Z^2\rangle = \tfrac{1}{2}k\langle a^2\cos^2(\omega_0 t)\rangle$$

d'où $\boxed{\langle E_p(M)\rangle = \tfrac{1}{4}ka^2}$.

Pour l'énergie cinétique,

$$\langle E_c(M)\rangle = \tfrac{1}{2}m\langle \dot{z}^2\rangle = \tfrac{1}{2}ma^2\omega_0^2\langle\sin^2(\omega_0 t)\rangle$$

d'où $\boxed{\langle E_c(M)\rangle = \tfrac{1}{4}ka^2}$. On a donc

$$\boxed{\langle E_c(M)\rangle = \langle E_p(M)\rangle},$$

ce qui correspond bien au théorème du viriel puisque qu'ici $k = 2$.

d. Applications numériques :

$$\boxed{\omega_0 = 14{,}1\ \mathrm{rad\cdot s^{-1}}}$$

et $\boxed{\langle E_p\rangle = 12{,}5\ \mathrm{mJ}}$.

II - Mouvement dans un champ newtonien

1. a. La force s'écrit $\boxed{\vec{F} = -G\frac{M_t m}{r^2}\vec{e}_r}$.

b. L'énergie potentielle E_p du satellite est telle que $\delta W = \vec{F}.\mathrm{d}\vec{l} = -\mathrm{d}E_p$. On obtient ici $\boxed{E_p = -G\frac{M_t m}{r}}$

c. On a donc $E_p(x,y,z) = -G\frac{M_t m}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ d'où $E_p(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \frac{1}{\lambda}E_p(x,y,z)$ et donc ici $k = -1$. On a donc

$$\boxed{-\langle E_p\rangle = 2\langle E_c\rangle}.$$

L'énergie mécanique s'écrit $E_M = E_p + E_c$. Le système étant conservatif, l'énergie mécanique est constante et sur une période on a donc : $\langle E_M\rangle = E_M = \langle E_c\rangle + \langle E_p\rangle$. Compte tenu du résultat précédent, on a donc :

$$\boxed{E_M = -\langle E_c\rangle = \tfrac{1}{2}\langle E_p\rangle}.$$

L'énergie mécanique est donc négative pour un état lié (d'après le préambule de l'énoncé, on n'étudie que les trajectoires bornées donc les états liés).

d. Sur une trajectoire circulaire, le rayon est constant donc l'énergie potentielle et donc l'énergie cinétique aussi. D'après la relation précédente, on a donc

$$-\tfrac{1}{2}mv_c^2 = \tfrac{1}{2}\tfrac{-GM_t m}{r_0}$$

d'où $\boxed{v_c = \sqrt{\frac{GM_t}{r_0}}}$.

2. a. Le théorème du moment cinétique appliqué en O donne :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}_O}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{OM}\wedge\vec{F} = 0.$$

On a donc

$$\vec{L}_O = \overrightarrow{OM}\wedge m\vec{v} = \overrightarrow{\mathrm{cst}}.$$

Le vecteur $\overrightarrow{OM}$ est donc constamment perpendiculaire à un vecteur constant. Le mouvement est donc plan. Dans le repère en polaire, le moment cinétique s'écrit

$$\begin{aligned}\vec{L}_O &= mr\vec{e}_r\wedge(\dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta) \\ &= mr^2\dot{\theta}\vec{e}_z\end{aligned}$$

On a donc bien $\boxed{C = r^2\dot{\theta}}$ constant.

b. L'énergie mécanique vaut

$$\begin{aligned}E_M &= -\frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{GM_t m}{r_0} \\ &= \frac{GM_t m}{r_0}\left(\frac{\alpha^2}{2} - 1\right)\end{aligned}$$

Comme $1 < \alpha < \sqrt{2}$, on a donc

$$E_M < 0.$$

La trajectoire est donc bornée.

c. D'après la formule de BINET, la relation fondamentale de la dynamique s'écrit

$$-mC^2u^2\left(\frac{d^2u}{d\theta^2}+u\right)=-GM_tmu^2$$

avec $u=\frac{1}{r}$. Les solutions de cette équation sont du type

$$u=u_0\cos(\theta-\theta_0)+\frac{GM_t}{C^2}.$$

On a donc $\boxed{r=\frac{C^2}{GM_t}\frac{1}{1+e\cos\theta}}$ par un choix judicieux de l'origine des angles. On a donc $\boxed{C'=C^2}$.

d. D'après la question 2.a,

$$C=\overrightarrow{OM}\wedge\vec{v}=r_0v_0=r_0\alpha\sqrt{\frac{GM_t}{r_0}}.$$

D'autre part $p=\frac{C^2}{GM_t}$. On a donc

$$p=r_0^2\alpha^2\frac{GM_t}{r_0}\frac{1}{GM_t}$$

d'où $\boxed{p=r_0\alpha^2}$.

e. Sur la trajectoire elliptique, il n'y a que deux points pour lesquels la vitesse est perpendiculaire au rayon vecteur : le périgée et l'apogée. On a donc

$$r_0=\frac{p}{1+e}\text{ ou }r_0=\frac{p}{1-e}.$$

Comme $p=r_0\alpha^2$ avec $\alpha>1$, on a nécessairement $r_0=\frac{p}{1+e}$ et donc $\boxed{e=\alpha^2-1}$.

f. On a donc $\boxed{r_p=r_0}$ et

$$r_a=\frac{p}{1-e}=\frac{r_0\alpha^2}{1-(\alpha^2-1)}$$

et donc $\boxed{r_a=\frac{r_0\alpha^2}{2-\alpha^2}}$.

3. a. D'après la question 2.c, on a

$$E=-\frac{GM_tm}{2a}=E_c+E_p=E_c-\frac{GM_tm}{r}$$

d'où

$$E_c=GM_tm\left(\frac{-1}{2a}+\frac{1}{r}\right).$$

Or

$$2a=r_p+r_a=\frac{p}{1+e}+\frac{p}{1-e}=\frac{2p}{1-e^2}.$$

On a donc

$$E_c=GM_tm\left(-\frac{1-e^2}{2p}+\frac{1+e\cos\theta}{p}\right)$$

et donc

$$\boxed{E_c=\frac{GM_tm}{2p}\left(1+e^2+2e\cos\theta\right)}$$

b. L'énergie potentielle vaut

$$E_p=-\frac{GM_tm}{r}$$

d'où

$$\boxed{E_p=-\frac{GM_tm}{p}(1+e\cos\theta)}$$

c. Le théorème du viriel donne :

$$2\langle E_c\rangle=-\langle E_p\rangle,$$

c'est à dire

$$2\langle\frac{GM_tm}{2p}\left(1+e^2+2e\cos\theta\right)\rangle=$$
$$-\langle-\frac{GM_tm}{p}(1+e\cos\theta)\rangle$$

d'où

$$1+e^2+2e\langle\cos\theta\rangle=1+e\langle\cos\theta\rangle$$

et donc

$$\boxed{\langle\cos\theta\rangle=-e}.$$

Ce résultat n'est pas surprenant car il s'agit d'une moyenne temporelle et θ n'est pas ici une fonction linéaire du temps.

Pour $\langle\sin\theta\rangle$, à cause des symétries de l'ellipse, $\boxed{\langle\sin\theta\rangle=0}$.

4. a. Comme $a=\frac{p}{1-e^2}$ et $GM_t=\frac{C^2}{p}$, la troisième loi de KEPLER s'écrit :

$$T^2\frac{(1-e^2)^3}{p^3}=4\pi^2\frac{p}{C^2}$$

d'où

$$\boxed{T=2\pi\frac{p^2}{C}\left(1-e^2\right)^{-3/2}}.$$

b. Comme $C=r^2\dot{\theta}$, on a donc

$$dt=\frac{p^2}{C}\frac{d\theta}{(1+e\cos\theta)^2}$$

soit

$$dt=\frac{T\left(1-e^2\right)^{3/2}}{2\pi}\frac{d\theta}{(1+e\cos\theta)^2}.$$

On a donc

$$\boxed{\Delta t=\frac{T\left(1-e^2\right)^{3/2}}{2\pi}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{d\theta}{(1+e\cos\theta)^2}}$$

Application numérique : on a donc $\Delta t_1=0{,}020T$. On constate donc que le satellite passe beaucoup moins de temps sur « la partie droite » de l'ellipse pour laquelle $\cos\theta\rangle 0$ que sur « la partie gauche ». Il est donc normal que $\langle\cos\theta\rangle$ soit négatif.

5. a. Dans l'atome d'hydrogène la force qui s'exerce entre le proton et l'électron est d'une forme semblable à celle qui s'exerce sur un satellite autour de la terre :

$$\vec{F} = \frac{-q^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

et correspond à un état lié du système. On a donc, en général, des trajectoires elliptiques.

b. Le moment dipolaire instantané de l'atome d'hydrogène s'écrit :

$$\boxed{\vec{P} = -qr\vec{e}_r = \frac{qp_0}{1+e\cos\theta}\vec{e}_r}.$$

Dans le cas où $e \ll 1$, le moment dipolaire s'écrit

$$\vec{P} = -qp_0\left(\cos\theta\vec{e}_x + \sin\theta\vec{e}_y\right)$$

d'où $\boxed{\langle\vec{P}\rangle = qp_0e\vec{e}_x}$

Application numérique :

$$\boxed{P = 0,12\ \mathrm{D}}.$$

c. Dans le modèle quantique, l'atome d'hydrogène dans l'état fondamental occupe l'orbitale $1s$ (cf chapître ATOM 2), qui a la symétrie sphérique. Donc le moment dipolaire est nul. Le modèle précédent (orbite faiblement elliptique) ne peut donc convenir. Par contre le modèle classique de BOHR donne le bon moment dipolaire puisque les orbites sont circulaires ($e = 0$).