DS 7 lundi 15 avril

Problème 1

À propos de l'atome d'hydrogène

I. Modèle planétaire de l'atome d'hydrogène

On considère l'atome d'hydrogène $^1_Z\mathrm{H}$.

I.1. Quel est le numéro atomique Z de l'atome d'hydrogène ? Préciser la composition de cet atome.

On étudie dans la suite le mouvement de l'électron autour du noyau de l'atome $^1_Z\mathrm{H}$.

La force électrostatique subie par l'électron est dirigée selon la droite proton-électron. Cette force attractive a pour intensité $F_e = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{e^2}{r^2}$, où e est la charge élémentaire et r la distance proton-électron.

I.2. L'interaction électrostatique est-elle toujours attractive ?

I.3. Exprimer l'intensité de l'interaction gravitationnelle F_g subie par l'électron de la part du noyau. On notera $\mathscr{G}$ la constante gravitationnelle. Cette interaction est-elle toujours attractive ?

I.4. Calculer un ordre de grandeur du rapport F_g/F_e. En déduire que l'on peut négliger l'interaction gravitationnelle devant l'interaction électrostatique.

I.5. Placer sur un schéma, représentant le système mécanique étudié, la force électrostatique qui s'exerce sur l'électron et la base mobile adaptée à l'étude de son mouvement.

Pour décrire l'atome d'hydrogène, Rutherford a utilisé un modèle planétaire dans le cadre de la mécanique newtonienne : l'électron a un mouvement circulaire, de rayon r, autour du noyau supposé fixe. Par la suite, on considérera le proton comme immobile dans un référentiel galiléen.

I.6. A partir de la relation fondamentale de la dynamique, montrer que le mouvement de l'électron est uniforme.

I.7. En déduire l'expression de la vitesse de l'électron v en fonction de ε_0, e, r et m_e.

I.8. Exprimer l'énergie cinétique de l'électron $\mathcal{E}_c$ en fonction de ε_0, e et r.

I.9. Déterminer l'expression de l'énergie potentielle $\mathcal{E}_p$ associée à l'interaction électrostatique (On conviendra de choisir $\mathcal{E}_p$ telle que $\mathcal{E}_p(r \to \infty) = 0$).

I.10. Montrer que l'énergie mécanique $\mathcal{E}_m$ de l'électron s'exprime sous la forme :

$$\mathcal{E}_m = -\frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r}$$

Commenter le signe.

Lors de l'étude de l'atome d'hydrogène, différents faits expérimentaux ont conduit Niels Bohr à formuler l'hypothèse suivante : l'électron ne peut se déplacer que sur certains cercles dont les rayons r_n obéissent à la loi (quantification du moment cinétique) :

$$L = n\hbar$$

où :

- L : moment cinétique de l'électron
- $\hbar$: constante de Planck réduite, $\hbar = \dfrac{h}{2\pi} = 1,055.10^{-34}\ \mathrm{J\cdot s}$
- n : nombre entier ≥ 1

I.11. Exprimer la norme du moment cinétique L en fonction de m_e, r_n et de sa vitesse v_n sur le cercle de rayon r_n.

I.12. En déduire l'expression de r_n en fonction des constantes ε_0, e, $\hbar$, m_e et de n puis en fonction de r_1 et n.

I.13. Déterminer l'expression de $\mathcal{E}_n$, énergie mécanique de l'électron sur le cercle de rayon r_n, en fonction de ε_0, e, $\hbar$, m_e et de n. En déduire que $\mathcal{E}_n$ est de la forme :

$$\mathcal{E}_n = \frac{\mathcal{E}_1}{n^2}$$

On exprimera $\mathcal{E}_1$ en fonction de ε_0, e et r_1.

I.14. Calculer r_1, puis calculer $\mathcal{E}_1$ en joule et en électronvolt ($1\,eV = 1,6.10^{-19}$ J).

II. Spectre de l'atome d'hydrogène

II.1. Quelle est l'expression de la fréquence ν puis de la longueur d'onde λ d'un photon émis lorsque l'électron passe d'un niveau d'énergie $\mathcal{E}_p$ à un niveau d'énergie $\mathcal{E}_n$ ($p > n$) ?

En 1885, Joseph Balmer observe le spectre visible de l'atome d'hydrogène. Il constate que $1/\lambda$ est proportionnel à $\dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{p^2}$:

$$\frac{1}{\lambda} = R_h\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{p^2}\right)$$

II.2. Déterminer l'expression de R_h en fonction de $\mathcal{E}_1$, h et c.

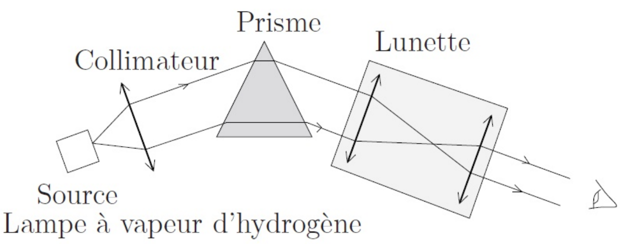
II.3. À quelle valeur de n la série de raies de l'atome d'hydrogène observée par Joseph Balmer correspond-elle ?

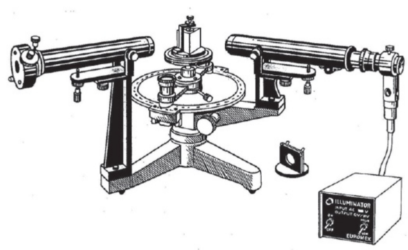
II.4. Déterminer les longueurs d'onde des raies de cette série pour p allant jusqu'à 5. On prendra pour les applications numériques $R_h = 1,097.10^7\ \mathrm{m^{-1}}$.

II.5. Quel intervalle de longueurs d'onde définit habituellement le spectre visible ?

III. Observation du spectre de l'atome d'hydrogène : le spectroscope à prisme

Pour observer au lycée le spectre visible de la lumière émise par une lampe à vapeur d'hydrogène, on utilise parfois un spectroscope à prisme.





Le prisme est réalisé dans un milieu solide transparent d'indice de réfraction n, d'arête P et d'angle au sommet $A = \pi/3$. Le prisme est dans l'air d'indice de réfraction 1.

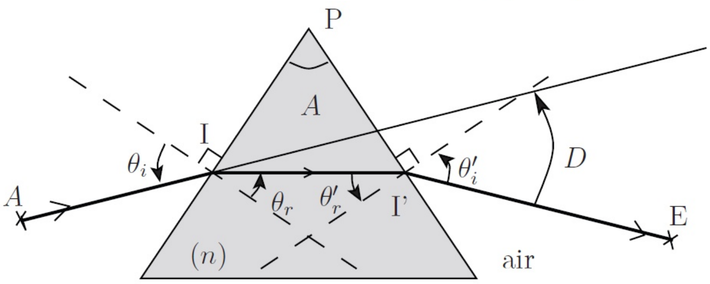
On étudie le trajet d'un rayon lumineux de longueur d'onde λ issu du faisceau parallèle incident émis par la source, contenu dans le plan de la figure perpendiculairement à l'arête P, arrivant en un point I de la face d'entrée du prisme.
La propagation de ce rayon est repérée successivement par les angles, θ_i, θ_r, θ'_r et θ'_i. L'ensemble de ces angles, ainsi que D et A sont repérés en convention trigonométrique et leur valeur est comprise entre 0 et $\pi/2$.

III.1. Déterminer une relation liant A, θ_r et θ'_r.

III.2. Appliquer la loi de Snell-Descartes pour la réfraction au point I et au point I'.

III.3. En déduire que si θ_i est supérieur à un angle limite θ_ℓ que l'on exprimera en fonction de n et A, le rayon subit une réflexion totale dans le prisme. Calculer θ_ℓ pour $n = 1,6$.

III.4. Exprimer l'angle de déviation D en fonction de A, θ_i et θ'_i.



On constate expérimentalement l'existence d'un minimum de la valeur de D lorsqu'on fait varier l'angle d'incidence. On note D_m, $\theta_{i,m}$, $\theta'_{i,m}$, $\theta_{r,m}$ et $\theta'_{r,m}$ la valeur des angles au minimum de déviation.

D'après le *principe de retour inverse de la lumière*, au minimum de déviation, le tracé du rayon lumineux est symétrique par rapport au plan bissecteur de l'angle du prisme.

III.5. En déduire une relation simple liant les angles $\theta_{i,m}$ et $\theta'_{i,m}$ et une relation simple liant les angles $\theta_{r,m}$ et $\theta'_{r,m}$ au minimum de déviation.

III.6. En déduire que lorsque D est minimum, n s'exprime sous la forme : $$n = \frac{\sin\left(\dfrac{A+D_m}{2}\right)}{\sin\left(\dfrac{A}{2}\right)}.$$

III.7. En dérivant cette expression par rapport à n, déterminer l'expression de $\dfrac{\mathrm{d}D_m}{\mathrm{d}n}$ en fonction de A et D_m.

Dans le domaine du visible, l'indice optique $n(\lambda)$ du prisme varie avec la longueur d'onde selon la loi de Cauchy : $n(\lambda) = a + b/\lambda^2$ où $a = 1,6247$ et $b = 14,34.10^{-15}$ m^2.

III.8. Quel phénomène physique permet de visualiser le spectre d'une lampe à hydrogène à l'aide d'un prisme ? Faire un schéma de principe.

III.9. A partir de la loi de Cauchy, déterminer l'expression de $\dfrac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda}$ en fonction de b et λ.

III.10. Pour la raie bleu-vert du spectre de l'atome d'hydrogène, on mesure une déviation minimale D_m de $54,85°$ avec une incertitude de $\Delta D_m = \pm 0,1°$. En déduire la valeur numérique de l'indice du prisme, puis de la longueur d'onde λ correspondante. A quelle valeur de p de la série de Balmer, cette raie correspond-elle ? On rappelle que $A = \pi/3$.

III.11. A l'aide des questions III.7 et III.9, déterminer $\dfrac{\mathrm{d}D_m}{\mathrm{d}\lambda} = \dfrac{\mathrm{d}D_m}{\mathrm{d}n}\dfrac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda}$. En déduire l'expression de l'incertitude $\Delta\lambda$ sur la détermination de la longueur d'onde λ de la raie observée. Calculer sa valeur.

Les données suivantes pourront être utiles :
- Masse d'un proton : $m_p = 1,7.10^{-27}$ kg
- Masse d'un électron : $m_e = 9,1.10^{-31}$ kg
- Masse molaire de l'hydrogène : $M_{\mathrm{H}} = 1\ \mathrm{g}\cdot\mathrm{mol}^{-1}$
- Charge élémentaire : $e = 1,6.10^{-19}$ C
- Constante de Planck : $h = 6,6.10^{-34}\ \mathrm{J}\cdot\mathrm{s}$
- Énergie d'un photon de fréquence ν : $\mathcal{E} = h\nu$
- Permittivité du vide : $\varepsilon_0 = \dfrac{1}{36\pi 10^9}\ \mathrm{F}\cdot\mathrm{m}^{-1}$
- Constante gravitationnelle : $\mathscr{G} = 6,7.10^{-11}\ \mathrm{m}^3\cdot\mathrm{kg}^{-1}\cdot\mathrm{s}^{-2}$
- Nombre d'Avogadro : $N_A = 6,02.10^{23}\ \mathrm{mol}^{-1}$

Problème 2

De la Terre à la Lune : Programme Apollo, 15 ans d'aventure spatiale

Ce problème aborde quelques aspects du Programme Apollo, qui permit à l'Homme de faire son premier pas sur la Lune le 21 juillet 1969. La première partie étudie le départ de la Terre, la seconde l'arrivée sur la Lune. La troisième étudie l'écoulement des gaz dans la tuyère d'un des cinq moteurs-fusées du premier étage de la fusée.

I De la Terre ...

La fusée lancée de Cap Canaveral en Floride, se met tout d'abord en orbite circulaire basse autour de la Terre. Elle est ensuite placée sur une orbite elliptique de transfert pour rejoindre finalement une orbite circulaire autour de la Lune. La durée d'une mission est typiquement d'une semaine.

I.A – Décollage

I.A.1) Choix du référentiel

a) Définir les référentiels terrestre et géocentrique, notés respectivement $\mathcal{R}_T$ et $\mathcal{R}_G$.

b) Définir un référentiel galiléen.

Dans toute la suite, $\mathcal{R}_G$ *sera le référentiel d'étude, considéré comme galiléen.*

c) Justifier ce choix.

I.A.2) Influence de la base de lancement

La Terre, associée à une sphère de rayon $R_T = 6{,}38 \times 10^3$ km, est animée d'un mouvement de rotation uniforme (figure 1) autour de l'axe Sud-Nord Tz, à la vitesse angulaire $\Omega = 7{,}29 \times 10^{-5}\ \mathrm{rad}\cdot\mathrm{s}^{-1}$.

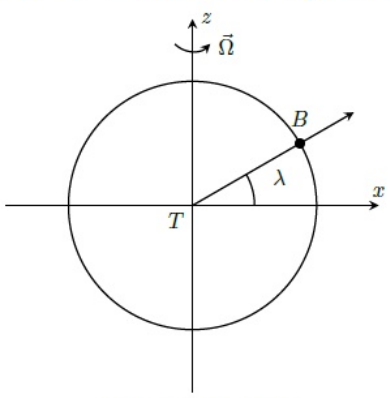


Figure 1 Latitude

a) Donner la nature de la trajectoire d'un point B à la surface de la Terre, situé à la latitude λ.

b) Établir l'expression du module v_B de sa vitesse.

c) Application numérique : Calculer v_{B1} pour la base de lancement de Cap Canaveral aux États-unis ($\lambda_1 = 28,5\ °$) et v_{B2} pour la base de Kourou en Guyane ($\lambda_2 = 5,2\ °$).

Une fusée de masse m_F décolle du point B, sans vitesse initiale par rapport à la Terre, pour atteindre une orbite circulaire autour de la Terre avec la vitesse finale v_0 par rapport à $\mathcal{R}_G$.

d) Déterminer l'expression de la variation d'énergie cinétique ΔE_c de la fusée, en fonction de v_B, v_0 et m_F.

e) Calculer numériquement l'économie relative réalisée, définie par $\dfrac{\Delta E_{c1} - \Delta E_{c2}}{\Delta E_{c1}}$, en choisissant la base de Kourou plutôt que celle de Cap Canaveral, avec $v_0 = 8\ \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$. Commenter.

f) Quel(s) autre(s) avantage(s) présente la base de Kourou ?

I.B – Orbite circulaire

I.B.1) Généralités

a) Rappeler l'expression de la force gravitationnelle $\vec{F}_G$ exercée par une masse ponctuelle m_1 située en O sur une masse ponctuelle m_2 située en M en fonction de m_1, m_2, $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$, $r = \|\vec{r}\|$ et la constante de gravitation $\mathcal{G}$.

b) Rappeler de même l'expression de la force électrique $\vec{F}_E$ exercée par une charge q_1 située en O sur une charge q_2 située en M.

c) Rappeler le théorème de Gauss de l'électrostatique.

d) Par analogie, donner le théorème de Gauss gravitationnel, donnant l'expression du champ gravitationnel $\vec{G}(M)$ créé par une distribution de masse $\mu(M)$.

I.B.2) Champ gravitationnel terrestre

La Terre est approximativement une boule à symétrie sphérique de centre T, de masse totale m_T.

a) Quelle est la direction de $\vec{G}(M)$?

b) De quelle(s) variable(s) dépend-t-il ?

c) Déterminer $\vec{G}(M)$ en tout point M à l'extérieur de la Terre.

d) Calculer son module g_T à la surface de la Terre, avec $\mathcal{G} \times m_T = 4{,}0 \times 10^{14}\ \text{m}^3 \cdot \text{s}^{-2}$.

e) Justifier enfin que la force exercée par la Terre sur un satellite de masse m_F situé au point M soit donnée par

$$\vec{F} = -\mathcal{G}\frac{m_F m_T}{r^3}\overrightarrow{TM}$$

où r est la distance TM.

I.B.3) Mouvement d'un satellite

Un satellite de masse m_F est en orbite autour de la Terre à la distance r de son centre.

a) Donner l'expression de l'énergie potentielle E_{p0} associée, en la choisissant nulle pour $r \to \infty$.

b) Montrer que la trajectoire est plane. Quelle est sa nature ?

La trajectoire est maintenant considérée circulaire.

c) Exprimer la vitesse v_0 de la fusée, ainsi que son énergie cinétique E_{c0}, en fonction de $\mathcal{G}$, m_F, m_T et r.

d) Exprimer le rapport $\dfrac{T_0^2}{r^3}$, où T représente la période de révolution du satellite, en fonction de $\mathcal{G}$ et m_T.

Quel est le nom de cette loi ? Dans la suite, on admettra que ce résultat se généralise aux orbites elliptiques en remplaçant r par a, demi-grand axe de l'ellipse.

e) Application numérique : calculer v_0 et T_0 pour une orbite circulaire basse ($r \simeq R_T$) .

f) Donner enfin l'expression de l'énergie mécanique de la fusée sous la forme $E_{m0} = -\dfrac{K}{2r}$, en précisant la valeur de K. Dans la suite, on admettra que ce résultat se généralise aux orbites elliptiques en remplaçant r par a, demi-grand axe de l'ellipse.

II ... à la Lune.

II.A – Objectif Lune

II.A.1) Orbite de transfert

La fusée Saturn V est d'abord placée en orbite circulaire autour de la Terre, dans un plan contenant l'axe Terre-Lune. Les moteurs du troisième étage sont alors allumés pendant une durée très courte : la vitesse de la fusée passe quasi instantanément de la vitesse v_0 à la vitesse v_1, de telle sorte que la nouvelle trajectoire soit elliptique de grand axe $2a \simeq d_{TL}$, où d_{TL} représente la distance Terre-Lune (Figure 2).

Figure 2 Orbite de transfert

a) Exprimer l'énergie mécanique E_{m1} de la fusée lorsqu'elle suit cette nouvelle trajectoire.

b) En déduire l'expression de la vitesse v_1. Application numérique.

c) Où est placée la Terre par rapport à cette ellipse ? À quel instant doit-on allumer les moteurs ?

d) Évaluer numériquement la durée t_1 du transfert Terre-Lune (parcours de la moitié de l'ellipse). On donne $d_{TL} = 3{,}8 \times 10^8$ m.

II.A.2) Orbite lunaire

Au voisinage de la Lune, de rayon R_L et de masse m_L, l'attraction de la Lune devient prépondérante et l'attraction de la Terre devient négligeable .

L'étude se fait désormais dans le référentiel lunocentrique, supposé galiléen.

Les paramètres du vol sont calculés pour qu'en cas de panne des moteurs, la fusée contourne la Lune pour revenir sur la Terre. (Ce fut le cas lors de la mission Apollo XIII). À l'approche de la Lune, les moteurs de la fusée sont rallumés, de façon à placer la fusée sur une orbite circulaire basse ($r \simeq R_L$) autour de la Lune.

a) Faut-il freiner ou accélérer ? Justifier qualitativement.

b) Déterminer numériquement v_2, vitesse associée à une orbite circulaire basse autour de la Lune, avec $\mathcal{G} \times m_L = 4{,}9 \times 10^{12}$ m$^3 \cdot$ s^{-2} et $R_L = 1{,}74 \times 10^3$ km.

II.B – Déplacements sur la Lune

II.B.1) Caractéristiques du sol lunaire

a) Exprimer le module du champ gravitationnel lunaire g_L à la surface de la Lune, en fonction de g_T, m_T, R_T, m_L et R_L.

b) Un bon athlète possède sur Terre une détente verticale de 1 m. Quelle serait cette détente sur la Lune ?

Le sol lunaire est accidenté et modélisé par une surface ondulée de période spatiale λ, d'équation $z(x) = A\cos(2\pi x/\lambda)$.

Un véhicule assimilé à un point matériel M se déplace sur cette surface suivant la loi $x_M(t) = v \times t$, où v est une constante.

c) Montrer que $z_M(t)$ est une fonction sinusoïdale du temps de pulsation ω. Relier ω, λ et v.

d) Déterminer la valeur maximale de A qui assure le maintien du véhicule au sol.

e) Application numérique : Calculer A_{max} pour $v = 14$ km $\cdot$ h^{-1} et $\lambda = 1$ m. Conclure.

II.B.2) Rover lunaire

Les astronautes des missions Apollo XV et suivantes ont utilisé pour leurs déplacements un véhicule spécialement adapté : le rover lunaire. Ce véhicule est sommairement modélisé par un parallélépipède de masse m_R, de centre de gravité G, reposant sur une roue de centre O de masse négligeable. Le vecteur $\overrightarrow{OG}$ reste toujours vertical (figure 3).

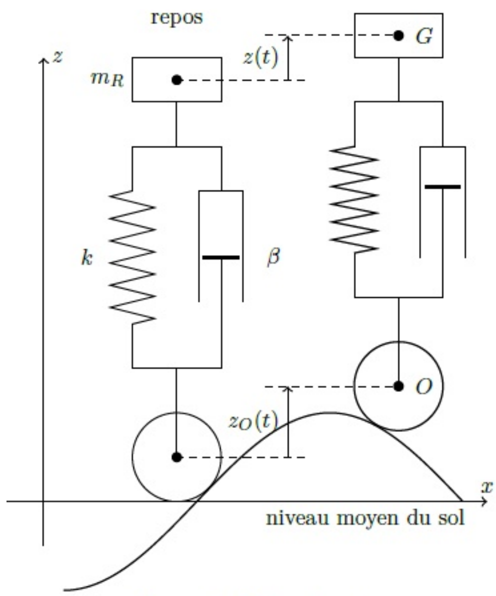


Figure 3 Rover lunaire.

Les positions du centre de gravité et du centre de la roue par rapport à la position de repos sont notées respectivement $z(t) = z_G(t)$ et $z_O(t)$. Le véhicule est relié à la roue par une suspension modélisée par un ressort de raideur k et de longueur à vide l_0 et un amortisseur fluide de constante d'amortissement β. La force exercée sur la masse m_R est donnée par

$$\vec{F}_f = -\beta\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}z_O}{\mathrm{d}t}\right)\vec{u}_z$$

a) Préciser l'allongement Δl du ressort au repos.

La roue restant en contact avec le sol, $z_O(t) = A\cos(\omega t)$.

b) En appliquant le principe fondamental de la dynamique à la masse m_R, Montrer que $z(t)$ vérifie l'équation différentielle

$$\ddot{z} + \omega_1\dot{z} + \omega_0^2 z = f(t)$$

en précisant les valeurs de ω_0, ω_1 et de la fonction $f(t)$ en fonction des données.

c) Montrer que l'amplitude complexe du mouvement du point G est donnée en régime sinusoïdal forcé par :

$$\underline{H} = \frac{\underline{z}}{\underline{z_O}} = \frac{1 + j\dfrac{\omega\omega_1}{\omega_0^2}}{1 + j\dfrac{\omega\omega_1}{\omega_0^2} - \dfrac{\omega^2}{\omega_0^2}}$$

d) Montrer que pour k suffisamment faible, $\underline{H}$ se réduit à la fonction de transfert d'un filtre passe bas du premier ordre, dont on exprimera la pulsation de coupure ω_c en fonction de β et m_R.

L'amplitude du mouvement vertical de G doit être limitée à environ le dixième de celle de O, pour $v = 14\ \mathrm{km\cdot h^{-1}}, \lambda = 1\ \mathrm{m}$ et $m_R = 700\ \mathrm{kg}$.

e) Proposer une valeur pour β.

f) Proposer une valeur pour k. À quoi sert le ressort ?

g) Quel serait le comportement de ce véhicule sur un terrain de même nature, à la surface de la Terre ?

FIN DU DEVOIR